XI Asamblea General de ALAFEC

22 al 25 de septiembre 2009

Guayaquil - Ecuador

Título de la ponencia:

Modelo Estocástico de Estimación de precios de mercado (SMPE)

Área Temática:
Finanzas
Modelos de valuación de acciones

Autor (es):

LAF & MSc Aldo Fabricio Gutiérrez Gómez

Institución:
Universidad Iberoamericana
Departamento de Estudios Empresariales
Licenciatura en Finanzas
México D.F., México

Domicilio:
Edificio A-1/104
Torres de Mixcoac
Álvaro Obregón, 01490
México D.F., México

Teléfono:
5593 9028
044 55 39 66 79 10

Dirección electrónica:
aldo.fg@web.de

Modelo Estocástico de Estimación de Precios de Mercado (SMPE)

Resumen

El Modelo Estocástico de Estimación de Precios de Mercado (SMPE) ha sido desarrollado por el autor de esta ponencia con la finalidad de poder estimar precios de mercado mediante herramientas matemáticas como el movimiento geométrico Browniano determinando una tendencia en los precios. Este modelo apoya la decisión de inversión mediante el uso de datos históricos de mercado que son utilizados para estimar si el precio futuro de un activo se encuentra por arriba o por debajo del precio actual, además de proveer un precio objetivo y un rango en el que dicho precio se encontrará con la finalidad de añadir un intervalo de confianza al modelo.

1. Análisis Técnico

Si hablamos del comportamiento de precios en el mercado, podríamos inmediatamente hacer una relación con el análisis técnico siendo ésta una herramienta extremadamente útil y muy utilizada para determinar la tendencia de los mismos y el rango futuro en el que fluctuarán los precios. Los analistas técnicos desarrollan reglas de compra – venta mediante la observación de los movimientos de precios históricos dentro del mercado. El análisis de los cambios históricos en los precios provee información relevante para determinar los posibles movimientos futuros.

El análisis técnico, sin embargo, difiere de la teoría de eficiencia de mercados dado que este tipo de análisis utiliza series numéricas generadas por la actividad histórica del mercado para predecir futuras tendencias en lugar de tomar en consideración la información disponible en el mercado (Cuadro 1.1)

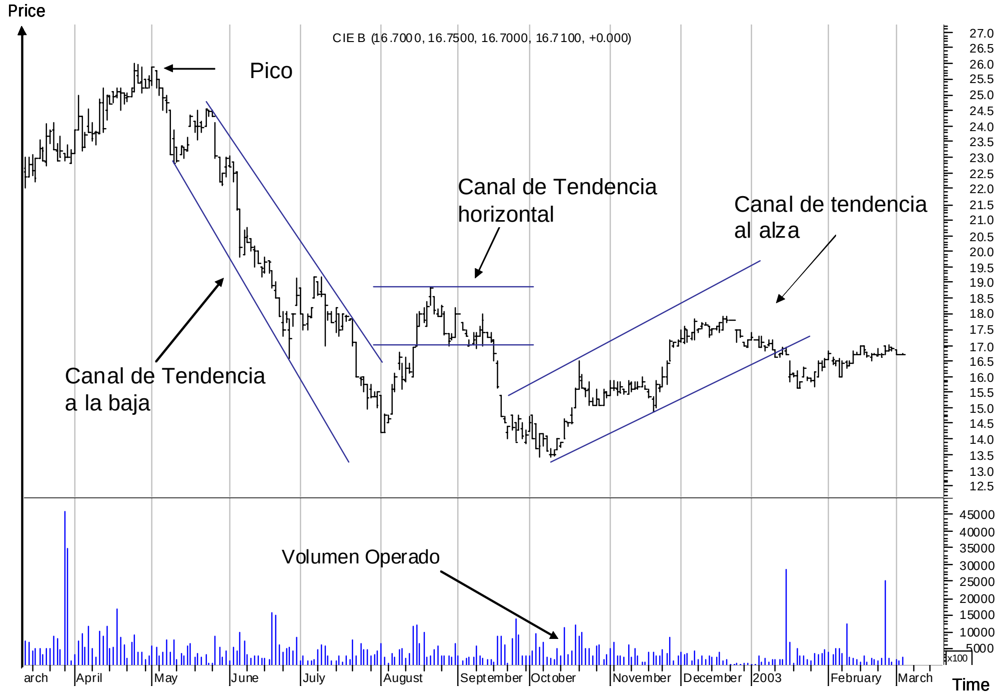
Actividad histórica de los precios en el mercado Cuadro 1.1

El análisis técnico no busca analizar la información financiera de una compañía y no es completamente exacto. Este análisis es considerado por muchos inversionistas como un arte más que como una ciencia, sin embargo, diferentes tipos de matemáticas, como ecuaciones diferenciales o estadística pueden ayudar a ver el análisis desde otra perspectiva. Como se mencionó con anterioridad, el análisis técnico apoya las decisiones de inversión en examinar datos históricos relacionados con precios y volumen de operación para determinar un comportamiento futuro del mercado y de cada valor operado dentro del mismo. Existen ciertos supuestos que deben ser considerados:

- El precio de mercado de cada activo está definido por la relación que existe entre la oferta y la demanda del mismo
- La oferta y la demanda están basados en numerosos factores racionales e irracionales

- La tendencia en la cuál se mueven los precios tiende a conservarse durante un largo tiempo bajo circunstancias normales de mercado
- La tendencia cambiará en reacción a desplazamientos en la oferta o la demanda.

Los principales indicadores del análisis técnico se muestran en el Cuadro 1.2.



Indicadores del Análisis Técnico Cuadro 1.2

Podemos identificar claramente tres diferentes canales de tendencia, tendencia al alza, tendencia a la baja y canal sin tendencia definida o canal horizontal. En el punto en el que la tendencia cambia, o cuando se rompe dicho canal, es posible identificar señales de compra o venta, dependiendo si dicha tendencia se rompe hacia arriba o hacia abajo. El pico es el punto más alto de la tendencia y sólo puede ser identificado una vez que la tendencia ha cambiado y los precios han ido a la baja.

Los precios se mueven en ciclos que se repiten mientras pasa el tiempo. El análisis técnico trata de determinar esos ciclos y los cambios en los mismos para estimar el rango futuro de precios.

2. Variables Externas al Mercado

Es importante tener siempre presente, que este tipo de análisis, sólo servirá para estimar la tendencia y los rangos de fluctuación que tiene los precios, pero nunca proveerá un precio exacto y jamás podrá predecir lo que sucederá en un futuro. Es prácticamente imposible poder incorporar todas las variables de mercado en un mismo modelo y crear un indicador dado que existen variables que no tienen dependencia del mercado, conocidas como variables externas que colapsarán cualquier modelo de valuación.

Una decisión inesperada del consejo directivo de una empresa podría cambiar dramáticamente la tendencia y el mismo precio de una acción; un cambio repentino en el nivel de las tasas de interés en un país pueden mover el mercado en su totalidad al igual que decisiones políticas pueden afectar el comportamiento "normal" del nivel de precios en el mercado llevándolo a un colapso o un crecimiento acelerado.

Decisiones macroeconómicas causarán un cambio en las expectativas de inversión incrementando o disminuyendo el volumen de operación en los mercados financieros. La incertidumbre es una variable que cambia en relación a las externalidades del mercado teniendo un efecto directo en los precios con una correlación muy alta, entre más alta sea la incertidumbre mayor será el cambio en los precios.

3. Indicador de Tendencia

El primer paso para estimar un precio de mercado es determinar la tendencia que tiene, ya sea a la alza o a la baja. Los precios no se mantendrán en el mismo nivel, salvo que no se opere dicho valor en un día determinado, si existe operación con un valor determinado, el precio se moverá afectado principalmente por la relación entre la oferta y la demanda. Con una gráfica de precios históricos, la tendencia primaria puede ser determinada con sólo ver la gráfica.

Es posible determinar tres tipos de tendencia que difieren en términos del tiempo, ya sea corto, mediano o largo plazo, conocidas como tendencia primaria, secundaria y terciaria. Para calcular las diferentes tendencias, los valores *i* y *j* deben ser diferentes. Para determinar una tendencia de corto plazo, la muestra de precios históricos utilizada puede ser entre 9 y 30 valores, por ejemplo 12 y 26. Una muestra con 50 ó 200 datos puede ser utilizada también, sin embargo el resultado compuesta por una cantidad mayor de datos tendrá como resultado una tendencia de largo plazo.

Para estimar la tendencia es posible utilizar tres diferentes ecuaciones basadas en promedios móviles exponenciales, teniendo la variable X como resultado de la tendencia.

$$X_n = \bar{x}_i - \bar{x}_j \text{ donde } \bar{x}_i < \bar{x}_j \text{ y } n = 1,2,\ldots,m$$

$$X_n = \left[\frac{p_1 + fp_2 + f^2 p_3 + \ldots + f^{i-1} p_i}{1 + f + f^2 + f^3 + \ldots + f^{i-1}}\right] - \left[\frac{p_1 + fp_2 + f^2 p_3 + \ldots + f^{j-1} p_j}{1 + f + f^2 + f^3 + \ldots + f^{j-1}}\right] \quad (1.1)$$

$$X_n = \left[(1-\alpha)^i p_0 + \alpha \sum_{k=1}^{i} (1-\alpha)^{i-k} p_k\right] - \left[(1-\alpha)^j p_0 + \alpha \sum_{k=1}^{j} (1-\alpha)^{j-k} p_k\right] \quad (1.2)$$

$$X_n = \left[\beta^{-i} p_0 + (\beta - 1)\beta^{-i-1} \sum_{k=1}^{i} \beta^k p_k\right] - \left[\beta^{-j} p_0 + (\beta - 1)\beta^{-j-1} \sum_{k=1}^{j} \beta^k p_k\right] \quad (1.3)$$

donde

$$f = 1 - \frac{2}{n+1} \ , \ \beta = \frac{1}{1-\alpha}$$

Teniendo X_n es sencillo calcular X_{n+1} utilizando la ecuación 1.4, haciendo posible calcular una tendencia diaria en los precios.

$$X_{n+1} = \frac{p_1 + f + X_n}{1 + f} \quad (1.4)$$

4. El Modelo Estocástico de Estimación de Precios de Mercado - SMPE

Una vez que la tendencia ha sido calculada, se procede a calcular el precio estimado de un activo. La ecuación que se enuncia a continuación aplica para mercado accionario, tasas de interés y mercado cambiario con solo sustituir una de las variables.

El modelo comienza con un precio de mercado F en el tiempo *t*.

$$F_t = E[F] \text{ en el tiempo } t$$

El cambio en el precio con respecto al tiempo está dado por:

$$\frac{dF}{dt} = \delta(t)F_t \text{ donde } F(0) = F_0 = const.$$

$$\delta(t) = [r(t) - q(t)] + \text{"}ruido\text{"}$$

$$r = r(t) = \text{ tasa de interés doméstica}$$

$$q = q(t) = \text{ tasa de interés internacional}$$

El cambio en el tiempo pude expresarse como la diferencia entre la tasa de interés local y foránea, ambas siendo una función del tiempo. El ruido es un movimiento aleatorio del precio F expresado por una constante α .

$$\frac{dF_t}{dt} = \delta_t F_t$$

$$\delta_t = [r_t - q_t] + \alpha W_t$$

W_t = “ruido blanco”, α = constante.

La diferencia entre las tasas de interés será sustituida por una nueva variable γ, así el nuevo modelo incluirá gamma como la diferencia entre las tasas de interés tratándose de divisas o la media aritmética para cálculos de instrumentos de capitales o deuda.

$$[r_t - q_t] = \gamma_t \, , \; \gamma_t = \gamma = const.$$

Con la interpretación de Ito X_t satisface la siguiente ecuación integral estocástica:

$$x_t = x_0 + \int_0^t b(s, x_s) ds + \int_0^t \sigma(s, x_s) dB_s$$

O en su forma diferencial:

$$dx_t = b(t, x_t) dt + \sigma(t, x_t) dB_t \tag{1.5}$$

$$\sigma(t, x) = \alpha x \; , \; \alpha = const.$$

Si $\gamma_t = \gamma = const$. con la interpretación de Ito (1.5) la ecuación es equivalente a:

$$dF_t = \gamma F_t dt + \alpha F_t dB_t \; , \text{ done } \sigma(t.x) = \alpha x$$

O bien

$$\frac{dF_t}{F_t} = \gamma dt + \alpha dB_t$$

Por lo tanto

$$\int \frac{dF_t}{F_t} = \gamma t + \alpha B_t \; , \; B_0 = 0$$

Para integrar la función, la ecuación de Ito: $g(t, x) = \ln x$; $x > 0$ puede ser utilizada y el resultado será

$$d(\ln F_t) = \frac{1}{F_t} dF_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{F_t^2}\right)(dF_t)^2$$
$$= \frac{dF_t}{F_t} - \frac{1}{2F_t^2}\alpha^2 F_t^2 dt$$
$$= \frac{dF_t}{F_t} - \frac{1}{2}\alpha^2 dt$$

Por lo tanto:

$$\frac{dF_t}{F_t} = d(\ln F_t) + \frac{1}{2}\alpha^2 dt$$

$$\ln \frac{F_t}{F_0} = \left(\gamma - \frac{1}{2}\alpha^2\right)t + \alpha B_t$$

$$\frac{F_t}{F_0} = e^{\left(\left(\gamma - \frac{1}{2}\alpha^2\right)t + \alpha B_t\right)}$$

$$F_t = F_0 e^{\left(\left(\gamma - \frac{1}{2}\alpha^2\right)t + \alpha B_t\right)}$$

El modelo puede ser resuelto con la integral de Stratonovich, obteniéndose un resultado diferente y variables extra en le exponente que son utilizadas para una estimación más aproximada del precio en el tiempo *t*:

$$x_t = x_0 \int_0^t b(s, x_s) ds + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma'(s, x_s)\sigma(s, x_s) ds + \int_0^t \sigma(s, x_s) dB_s$$

$$dF_t = \gamma F_t dt + \alpha F_t dB_t$$

$$d\overline{F}_t = \gamma \overline{F}_t dt + \alpha \overline{F}_t dB_t$$

$$\overline{F}_t = F_0 e^{(\gamma t + \alpha B_t)}$$

La solución es un proceso del tipo: $x_t = x_0 e^{(\mu t + \alpha B_t)}$ donde $\mu, \alpha = const$.

B_t es independiente de F_0 y como resultado se obtendrá:

$$E[F_t] = E[F_0]e^{\gamma t}$$

El mismo resultado cuando el ruido en $\delta(t)$ no se puede identificar:

$$Y_t = e^{\alpha B_t}$$

B_t puede remplazarse con

$$B_t = \mu + \frac{\sigma^2}{2}$$

Que es el crecimiento esperado en los precios bajo un movimiento geométrico Browniano.

Aplicando la ecuación de Ito se obtiene el siguiente resultado:

$$dY_t = \alpha e^{\alpha B_t} dB_t + \frac{1}{2}\alpha^2 e^{\alpha B_t} dt$$

O

$$Y_t = Y_0 + \alpha \int_0^t e^{\alpha B_s} dB_s + \frac{1}{2}\alpha^2 \int_0^t e^{\alpha B_s} ds$$

Teorema:

Si $f, g \in \nu(0,T)$ y $0 \le S < u < T$ entonces

i) $\int_S^T f dB_t = \int_S^u f dB_t + \int_u^T f dB_t$

ii) $\int_S^T (cf + g) dB_t = c\int_S^T f dB_t + \int_S^T g dB_t$

iii) $E\left[\int_S^T f dB_t\right] = 0$

iv) $\int_S^T f dB_t$ es $F_t -$ medible

Dado que $E\left[\int_0^t e^{\alpha B_s} dB_s\right] = 0$, tipo iii) del teorema, se obtiene:

$$E[Y_t] = E[Y_0] + \frac{1}{2}\alpha^2 \int_0^t E[Y_s]ds$$

$$E[Y_t] = e^{\frac{1}{2}\alpha^2 t}$$

El resultado de la ecuación de Ito es:

$$E[F_t] = E[F_0]e^{\gamma t}$$

Que puede ser expresado como:

$$F_t = F_0 e^{rt} \tag{1.6}$$

Que proporciona la ecuación para calcular el precio futuro donde

F_t = Tasa de interés futura en el tiempo t

F_0 = Tasa de interés en el tiempo 0

r = Tasa de interés

t = Tiempo

Esta ecuación es utilizada en finanzas pero únicamente proporciona un tipo de cambio o precio teórico que en la mayoría de los casos será mayor en el tiempo t que en el tiempo 0 dado que la probabilidad de tener un exponente negativo es muy baja.

Si se modifica este modelo aplicando la integral de Stratonovich el resultado se verá de la siguiente manera:

$$E[F_t] = E[F_0]e^{(\gamma + \frac{1}{2}\alpha^2)t}$$

donde $\gamma = (r_t - q_t)$ será la diferencia entre las tasas de interés hablando de divisas o bien la media aritmética de los precios para activos cotizados en Mercados de capitales o dinero y α es la desviación estándar del cambio relativo de los precios.

Teniendo esta ecuación, se introduce el indicador de tendencia como una nueva variable en el exponente representada por X (sección 3) que tomará valores de 1 ó -1 dependiendo de la tendencia, valor positivo para una tendencia alcista y negativo para una tendencia ala baja.

$$E[F_t] = E[F_0]e^{X((\gamma + \frac{1}{2}\alpha^2)t)}$$

El nuevo modelo llamado Modelo Estocástico de Estimación de Precios de Mercado (SMPE) se describe por la siguiente ecuación:

$$P_t = P_0 e^{X\left(\left(\gamma + \frac{\alpha^2}{2}\right)t\right)} \qquad (1.7)$$

Agregando el indicador de tendencia X el precio esperado no sólo crecerá como en el modelo de precio futuro 1.6. Así será posible estimar un precio o un cambio en el precio mas realista pues también puede disminuir en el tiempo *t*.

Para cumplir con el propósito de este modelo, α será sustituida por la desviación estándar del cambio relativo en los precios que se traduce en una volatilidad de los mismos definido como:

$$\text{Crecimiento en el precio} = R_t = \left(\frac{F_t}{F_{t-1}} - 1\right) * 100$$

Y la ecuación de la desviación estándar:

$$\text{Desviación Estándar} = \sigma = \alpha = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Para obtener un resultado más exacto, será necesario calcular la desviación estándar con la menos 500 datos, esto permitirá tener una volatilidad con menos variación.

Comprobación:

El precio de la acción Telmex serie L en las últimas dos semanas del mes de abril de 2009 se muestran a continuación:

Fecha	Apertura	Maximo	Minimo	Cierre	Volume
4/27/2009	11.09	11.21	10.95	11.20	15,664,400
4/24/2009	10.89	11.20	10.83	11.20	23,187,200
4/23/2009	10.83	11.04	10.72	10.87	11,579,400
4/22/2009	11.03	11.05	10.84	10.84	10,422,600
4/21/2009	10.80	11.19	10.75	10.94	14,347,200
4/20/2009	11.00	11.05	10.70	10.93	7,894,500
4/17/2009	11.22	11.24	11.04	11.13	8,930,700
4/16/2009	11.16	11.29	11.05	11.23	9,496,000
4/15/2009	11.27	11.33	11.06	11.12	9,960,300
4/14/2009	11.15	11.34	10.94	11.24	17,326,400
4/13/2009	10.95	11.28	10.81	11.00	26,854,200

Fuente: Reuters Tabla 1.1

Si se estima el precio de la acción de Telmex utilizando la primera ecuación derivada del la Integral de Ito, teniendo como precio inicial el precio de cierre del día 11 13 de abril, $F_0 = 11.00$ in time t_0. El precio se estimará tomando en cuenta el tiempo t_1 = 10 días.

$$F_t = F_0 e^{\alpha t}$$

La desviación estándar de los rendimientos de Telmex es 2.377318% y el tiempo será expresado como $\frac{10}{360}$;

$$\alpha = 0.02377318$$

$$F_t = 11.00e^{(0.02377318*\frac{10}{260})}$$

$$F_t = 11.00 * 1.000660584$$

$$F_t = 11.00727$$

El precio de mercado diez días después de F_0, es decir, el 27 de abril de 2009 fue 11.20, por tanto la ecuación de precio futuro asume que el precio solo cambiará en relación a la volatilidad del mismo, sin tomar en cuenta los precios y rendimientos históricos y la relación entre oferta y demanda.

Procederemos ahora a analizar el precio en la misma situación pero utilizando el Modelo Estocástico de Estimación de Precios de Mercado (SMPE) (ecuación 1.7).

$$P_t = P_0 e^{X\left(\left(\gamma + \frac{\alpha^2}{2}\right)t\right)}$$

Aplicando la ecuación 1.1 con $i = 12$ y $j = 26$ obtenemos:

$$f_{12} = 1 - \frac{2}{12+1} = 0.846154$$

$$f_{26} = 1 - \frac{2}{26+1} = 0.925926$$

Y sustituyendo el indicador de tendencia con los precios históricos del activo en la tabla 1.2 obtendremos la tendencia del precio:

$$X_n = \left[\frac{11.00 + 0.846154 * 10.98 + 0.846154^2 * 11.00 + ... + 0.846154^{11} * 10.31}{1 + 0.846154 + 0.846154^2 + 0.846154^3 + ... + 0.846154^{11}} \right]$$

$$- \left[\frac{11.00 + 0.925926 * 10.98 + 0.925926^2 * 11.00 + ... + 0.925926^{25} * 10.42}{1 + 0.925926 + 0.925926^2 + 0.925926^3 + ... + 0.925926^{25}} \right]$$

$$X_n = 0.316882732$$

Dado que el resultado es una tendencia a la alza, X será sustituida por +1 en el modelo. Procedemos ahora a calcular las variables γ y α. Siendo γ la media aritmética de los rendimientos:

$$\gamma = (\bar{x}) = 1.6364340\%$$

Una vez calculada la desviación estándar se obtiene:

$$\alpha = 0.023773183$$

Una vez que todas las variables han sido calculadas y pueden ser incorporadas al modelo, el precio de mercado estimado es el siguiente:

$$P_t = P_0 e^{X\left(\left(\gamma + \frac{\alpha^2}{2}\right)t\right)}$$

$$P_t = 11.00 e^{1\left(\left(0.01636434 + \frac{0.023773183^2}{2}\right)\frac{10}{360}\right)}$$

$$P_t = 11.00 * 1.016506948$$

$$P_t = 11.181576$$

El precio de mercado para el día 27 de abril del 2009, como puede observarse en la tabla 1.1 es de 11.20 pesos, por lo que la estimación del precio tiene un error de 0.1645% lo cual es aceptable.

Es importante recalcar, que este modelo únicamente provee una estimación del precio futuro de mercado, sin embargo, pueden presentarse variables externas o movimientos de mercado inusuales que pueden hacer que el precio estimado no sea una condición que pueda cumplirse.

Para hacer el modelo más confiable, se puede agregar un intervalo de confidencia al modelo para determinar un rango de precios en el que el precio futuro se encontrará en el tiempo *t*. La mitad del intervalo de confianza está dado por:

$$CI = z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Esta mitad del intervalo de confianza será sumada y sustraída del precio futuro obtenido por el modelo para determinar el intervalo total en donde se encontrará el precio, siendo el precio calculado la el punto medio del intervalo total.

El valor de *z* está dado por la distribución normal estándar y dependerá del nivel de confianza que se quiera aplicar al modelo.

El modelo completo está dado por la siguiente ecuación:

$$P_t = P_0 e^{X\left(\left(\gamma+\frac{\alpha^2}{2}\right)t\right)} \pm z\frac{\alpha}{\sqrt{n}}$$

Es importante considerar que el modelo arrojará un resultado más preciso en el corto plazo pues pueden existir situaciones ajenas al Mercado que pueden romper la tendencia con la que se está calculando.

XI Asamblea General de ALAFEC
Guayaquil - Ecuador 2009

5 Bibliografía

ROSS, Sheldon M. Stochastic Processes, 2nd Edition, John Wiley & Sons, EUA 1997.

YATES, Roy D., GOODSMAN, David J. Probability and stochastic processes, John Wiley & Sons, Inglaterra 1996.

DUDEWICZ, Edward J., MISHRA, Satya N. Modern Mathematical Statistics, John Wiley & Sons, EUA 1998.

IBRAGIMOV, Nail H. Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons, West Sussex, Inglaterra, 1999.

GARDINER, Crispin W. Handbook of Stochastic Methods, 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin, Alemania, 1994.

ROSS, Sheldon M. An Elementary Introduction to Mathematical Finance, 2nd Edition, Cambridge University Press, New York, EUA, 2003.

REILLY, Frank K., BROWN, Keith C. Investment Analysis & Portfolio Management, 7th Edition, Thomson Southwestern, Mason, EUA, 2003.

DEFUSCO, Richard A., MACLEAVY, Dennis W., PINTO, Jerald E., RUNKLE, David E. Quantitative Methods for Investment Analysis, 2nd Edition, CFA Institute & United Book Press, Baltimore, EUA, 2004.

IBRAGIMOV, Nail H. A Practical Course in Differential Equations and Mathematical Modeling, 2nd Edition, Alga Publications, Karlskrona Suecia, 2005.

ØKSENDAL, Bernt Stochastic Differential Equations, 6th Edition, Springer, Berlin, Alemania, 2003.

BERNSTEIN, Peter L. Against the Gods, The Remarkable Story of Risk, John Wiley & Sons, EUA, 1996.

CHATFIELD, C. The Analysis of Time Series, an Introduction, 4th Edition, Chapman & Hall, London, Inglaterra, 1989.

MERZIEGER, Gerhard, WIRTH, Thomas Repetitorium der Höheren Mathematik, 4th Edition, Binomi, Springe, Alemania, 2002.

FAMA, Eugene Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work, J.F, 1970.

WILMOTT, Paul, HOWISON, Sam, DEWYNNE, Jeff The Mathematics of Financial Derivatives (a Student Introduction), Cambridge University Press, USA, 2002.

CAPINSKI, Marek, ZASTAWNIAK, Tomasz Mathematics for Finance, An Introduction to Financial Engineering, Springer, USA, 2004.

LUNDBERGER, David G. Investment Science, Oxford University Press, USA 1998.