

# Estimar parámetros $\sigma$ -estables del rendimiento logarítmico del tipo de cambio peso-dólar para valorar opciones europeas

Áreas de investigación: Finanzas

**José Antonio Climent Hernández**  
Universidad Nacional Autónoma de México  
México

[antonio.climent@ciencias.unam.mx](mailto:antonio.climent@ciencias.unam.mx), [antoniocliment@hotmail.com](mailto:antoniocliment@hotmail.com)

## CONGRESO INTERNACIONAL DE CONTADURÍA ADMINISTRACIÓN E INFORMÁTICA



Octubre 5, 6 y 7 de 2011  
Ciudad Universitaria  
México, D.F.

<http://congreso.investiga.fca.unam.mx>

[informacongreso@fca.unam.mx](mailto:informacongreso@fca.unam.mx)

Teléfonos

52 (55) 5622.84.90

52 (55) 5622.84.80

Fax

52 (55) 5616.03.08



**ANFECA**  
Asociación Nacional de Facultades y  
Escuelas de Contaduría y Administración

División de Investigación, Facultad de Contaduría y Administración, UNAM  
Circuito Exterior s/n, Ciudad Universitaria, México, D.F., C.P. 04510

# Estimar parámetros $\mathcal{D}$ -estables del rendimiento logarítmico del tipo de cambio peso-dólar para valorar opciones europeas

## Resumen

En este artículo se muestra como modelar las características empíricas que el rendimiento logarítmico del tipo de cambio para comprar dólares como alguna distribución  $\mathcal{D}$ -estable para lo que es necesario determinar el procedimiento para estimar los parámetros de la distribución a través de los métodos de estimación de verosimilitud máxima, tabulación por cuantiles de las distribuciones  $\mathcal{D}$ -estables y regresión sobre la función característica de la muestra, realizar las pruebas de bondad de ajuste de *Kolmogorov-Smirnov* y  $\chi^2$  para seleccionar cuantitativamente la mejor estimación de los parámetros de la función distribución.



Octubre 5, 6 y 7 de 2011  
Ciudad Universitaria  
México, D.F.

CONGRESO  
INTERNACIONAL  
DE  
CONTADURÍA  
ADMINISTRACIÓN  
E  
INFORMÁTICA

Copyright © 2011. Todos los derechos reservados. Fotografía: Andrés López Ochoa

<http://congreso.investiga.fca.unam.mx>

[informacongreso@fca.unam.mx](mailto:informacongreso@fca.unam.mx)

Teléfonos

52 (55) 5622.84.90

52 (55) 5622.84.80

Fax

52 (55) 5616.03.08



**ANFECA**  
Asociación Nacional de Facultades y  
Escuelas de Contaduría y Administración

División de Investigación, Facultad de Contaduría y Administración, UNAM  
Circuito Exterior s/n, Ciudad Universitaria, México, D.F., C.P. 04510

Estimar parámetros  $\alpha$ -estables del rendimiento logarítmico del tipo de cambio peso-dólar para valorar opciones europeas

## Introducción

Al conocer el tiempo de vigencia, la volatilidad implícita del modelo de *Black--Scholes* (1973) para valorar opciones de venta fuera de dinero es más elevada que al valorar opciones de compra fuera de dinero. Este fenómeno es llamado sonrisa de volatilidad implícita.

La sonrisa de volatilidad implícita es el resultado de ausencia de normalidad en rendimiento subyacente. La pendiente negativa de la sonrisa de volatilidad implícita refleja el sesgo negativo de la función de distribución neutral al riesgo del rendimiento subyacente, mientras que la pendiente positiva de la sonrisa de volatilidad implícita refleja las colas pesadas (leptocurtosis) de la función de distribución.

Para responder al comportamiento de la sonrisa de volatilidad implícita al conocer el tiempo de vigencia se propone modelar el logaritmo del rendimiento subyacente como algún proceso  $\alpha$ -estable y entonces la sonrisa de volatilidad implícita se aplanará rápidamente de igual forma que ocurre al aumentar el tiempo de vigencia.

Las distribuciones  $\alpha$ -estables pueden mejorar la forma para modelar el rendimiento subyacente, valorar las fluctuaciones que se presentan lejos de la media (modelar valores extremos), exhiben autosimilaridad o propiedad de estabilidad por lo cual la función de distribución del movimiento  $\alpha$ -estable durante cualquier periodo tiene la misma forma sobre escala. Como resultado, si  $\alpha < 2$ , entonces la función de distribución neutral al riesgo tiene las colas pesadas para todos los periodos de vigencia y se puede modelar el patrón de tiempo de vigencia de la sonrisa de volatilidad implícita observada en el mercado de opciones.

Al modelar el rendimiento subyacente con el movimiento  $\alpha$ -estable se puede obtener alguna fórmula analítica simple para la función característica del rendimiento subyacente.

## Distribuciones $\alpha$ -estables

Las distribuciones  $\alpha$ -estables es la clase de las funciones de distribución de probabilidad que permite modelar el sesgo, la curtosis y algunas propiedades estadísticas. La clase fue caracterizada por *Paul Lévy* en el estudio que realizó acerca de la suma de términos independientes e idénticamente distribuidos en 1924.

Definición 1 (Variable aleatoria  $\alpha$ -estable).

La variable aleatoria  $X$  es  $\alpha$ -estable si y sólo si para toda  $\{n \in \mathbb{N} \mid n > 1\}$ , existen las constantes  $\{c_n \in \mathbb{R} \mid c_n > 0\}$  y  $\{d_n \in \mathbb{R}\}$  tales que:

$$X_1 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n \quad (1.1)$$

Donde  $X_1, \dots, X_n$  son copias independientes e idénticas de la variable aleatoria  $X$  y la constante de

escala debe satisfacer  $c_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$  para alguna  $\alpha \in (0,2]$ .

Las funciones de distribución de probabilidad  $\alpha$ -estables tienen expresiones analíticas cerradas para los tres casos siguientes:

1. *Gaussiano* ( $\alpha=2$ ,  $\beta=0$ ,  $\gamma = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$  y  $\delta=\mu$ ).
2. *Cauchy* ( $\alpha=1$  y  $\beta=0$ ).
3. *Lévy* ( $\alpha = \frac{1}{2}$  y  $\beta = \pm 1$ ).

### Parámetros de las distribuciones $\alpha$ -estables

Las distribuciones  $\alpha$ -estables se pueden caracterizar a través de los parámetros siguientes:

**Definición 2 (Estabilidad).** Permite determinar el grado de curtosis y la pendiente con la que decrecen las colas de la función de distribución de probabilidad ( $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid 0 < \alpha \leq 2\}$ ).

**Definición 3 (Asimetría).** Permite determinar el grado de asimetría (sesgo) de la función de distribución de probabilidad ( $\{\beta \in \mathbb{R} \mid -1 \leq \beta \leq 1\}$ ).

**Definición 4 (Escala).** Permite determinar las unidades de dispersión que tiene la función de distribución de probabilidad con respecto a la media ( $\{\gamma \in \mathbb{R} \mid \gamma > 0\}$ ).

**Definición 5 (Localización).** Permite determinar el punto de localización que tiene la función de distribución de probabilidad ( $\{\delta \in \mathbb{R}\}$ ).

### Función característica

Las funciones de distribución de probabilidad  $\alpha$ -estables no tienen alguna expresión analítica cerrada para caracterizar a la variable aleatoria, por lo que a través de la función característica  $\varphi$  y la función de cumulantes  $\psi$  se puede caracterizar de forma única a la variable aleatoria.

**Definición 6.** La variable aleatoria  $Y$  es  $\alpha$ -estable si y sólo si  $Y \stackrel{d}{=} \gamma Z + \delta$ , donde  $Z$  es alguna variable aleatoria con la función característica siguiente:

$$\varphi_z(\kappa) = E e^{i\kappa Z} = \begin{cases} e^{-|\kappa|^\alpha (1 - i\beta \text{sig} \kappa \tan \theta)} & \alpha \neq 1 \\ e^{-|\kappa| \left(1 - i\frac{\pi}{2} \beta \text{sig} \kappa \ln \kappa\right)} & \alpha = 1 \end{cases} \quad (1.2)$$



Donde:

$$\text{sig } \kappa = \begin{cases} \frac{\kappa}{|\kappa|} & \kappa \neq 0 \\ 0 & \kappa = 0 \end{cases}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \alpha$$

### Función de cumulantes

La función de cumulantes de la variable aleatoria Z se puede representar de la forma siguiente:

$$\psi_{Z \ \kappa} = \ln \varphi_{Z \ \kappa} = \begin{cases} -|\kappa|^\alpha \frac{1 - i \beta \text{sig } \kappa \tan \theta}{2} & \alpha \neq 1 \\ -|\kappa| \left( 1 - i \frac{\pi}{2} \beta \text{sig } \kappa \ln \kappa \right) & \alpha = 1 \end{cases} \quad (1.3)$$

Si  $\beta = \delta = 0$ , entonces la función de distribución de probabilidad es simétrica con respecto al origen, por lo que la variable aleatoria Z se distribuye  $\alpha$ -estable con parámetro de escala  $\gamma$  y la función de cumulantes de la variable aleatoria  $\gamma Z$  es la siguiente:

$$\psi_{\gamma Z \ \kappa} = -\gamma^\alpha |\kappa|^\alpha$$

### Parametrización estándar de las distribuciones $\alpha$ -estables

Octubre 5, 6 y 7 de 2011

La parametrización más utilizada para modelar funciones de distribución  $\alpha$ -estables y realizar cálculos numéricos es la parametrización estándar  $S_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  propuesta por *Samorodnitsky–Taqqu* en 1994.

Definición 7 (Parametrización estándar). La variable aleatoria Y se distribuye  $S_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  si:

$$Y \stackrel{d}{=} \begin{cases} \gamma Z + \delta & \alpha \neq 1 \\ \gamma Z + \delta + \frac{\pi}{2} \beta \ln \gamma & \alpha = 1 \end{cases} \quad (1.4)$$

Donde la variable aleatoria  $Z \sim S_1(\alpha, \beta) = S_1(\alpha, \beta, 0, 0)$ , entonces la variable aleatoria Y se puede representar a través de la función de cumulantes siguiente:

$$\psi_Y \ \kappa = \begin{cases} -|\kappa|^\alpha \frac{1 - i \beta \text{sig } \kappa \tan \theta}{2} + i \delta \kappa & \alpha \neq 1 \\ -|\kappa| \left( 1 - i \frac{\pi}{2} \beta \text{sig } \kappa \ln \kappa \right) + i \delta \kappa & \alpha = 1 \end{cases} \quad (1.5)$$

## Propiedades de las distribuciones $\alpha$ -estables

Las propiedades de las distribuciones  $\alpha$ -estables que son necesarias son las siguientes:

Propiedad 1 (Suma de variables aleatorias). Si  $X_1 \sim S_1(\alpha, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$  y  $X_2 \sim S_1(\alpha, \beta_2, \gamma_2, \delta_2)$  son variables aleatorias independientes, entonces:

$$X = X_1 + X_2 \sim S_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \quad (1.6)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \gamma^\alpha &= \gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha \\ \beta &= \frac{\beta_1 \gamma_1^\alpha + \beta_2 \gamma_2^\alpha}{\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha} \\ \delta &= \delta_1 + \delta_2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Propiedad 2 (Reflexión). Si  $X_1 \sim S_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ , entonces:

$$X \sim S_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \Leftrightarrow -X \sim S_1(\alpha, -\beta, \gamma, -\delta) \quad (1.8)$$

Propiedad 3 (Soporte). El soporte de la función de distribución de probabilidad  $\alpha$ -estable es el siguiente:

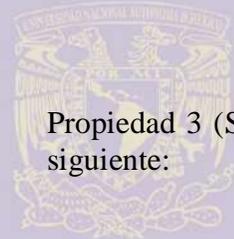
$$\text{soporte } f_x \quad x; \alpha, \beta, \gamma, \delta = \begin{cases} -\infty, \delta & \alpha < 1 \text{ y } \beta = -1 \\ \delta, \infty & \alpha < 1 \text{ y } \beta = 1 \\ -\infty, \infty & \alpha \geq 1 \text{ y } -1 < \beta < 1 \end{cases} \quad (1.9)$$

Propiedad 4 (Transformada de Laplace). Si  $X \sim S_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  y  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $\Re(\lambda) > 0$ , entonces:

$$L_X(\lambda) = E e^{-\lambda X} = \begin{cases} e^{-\gamma^\alpha \lambda^\alpha \sec \theta - \delta \lambda} & \alpha \neq 1 \\ e^{\frac{2}{\pi} \gamma \lambda \ln \lambda - \delta \lambda} & \alpha = 1 \end{cases} \quad (1.10)$$

Equivalentemente se tiene que si  $X \sim S_1(\alpha, -\beta, \gamma, \delta)$  y  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $\Re(\lambda) > 0$ , entonces:

$$L_X(-\lambda) = E e^{\lambda X} = \begin{cases} e^{-\gamma^\alpha \lambda^\alpha \sec \theta + \delta \lambda} & \alpha \neq 1 \\ e^{\frac{2}{\pi} \gamma \lambda \ln \lambda + \delta \lambda} & \alpha = 1 \end{cases} \quad (1.11)$$



Octubre 5, 6 y 7 de 2011  
Ciudad Universitaria  
México, D.F.

<http://congreso.investiga.fca.unam.mx>

[informacongreso@fca.unam.mx](mailto:informacongreso@fca.unam.mx)

Teléfonos

52 (55) 5622.84.90

52 (55) 5622.84.80

Fax 52 (55) 5616.03.08



**ANFECA**  
Asociación Nacional de Facultades y  
Escuelas de Contaduría y Administración

División de Investigación, Facultad de Contaduría y Administración, UNAM  
Circuito Exterior s/n, Ciudad Universitaria, México, D.F., C.P. 04510

Propiedad 5 (Momentos finitos). Si  $X \sim S_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  tal que  $0 < \alpha < 1$ , entonces:

$$E |X|^m < \infty \quad 0 < m < \alpha \quad (1.12)$$

$$E |X|^m = \infty \quad m \geq \alpha \quad (1.13)$$

Por la Propiedad 1 y la Propiedad 2 se tiene que:

$$\gamma_1^\alpha = \frac{1-\beta}{2} \gamma^\alpha \quad (1.14)$$

$$\gamma_2^\alpha = \frac{1+\beta}{2} \gamma^\alpha \quad (1.15)$$

### El tipo de cambio con precio de cierre para comprar dólares

El tipo de cambio interbancario con fecha valor 48 horas (para operaciones al mayoreo entre bancos, casas de bolsa, casas de cambio, empresas y particulares. Este tipo de cambio es aplicable para liquidar operaciones el segundo día hábil bancario inmediato siguiente a la fecha de su concertación).

La información del tipo de cambio interbancario se puede obtener a través de la página electrónica del Banco de México ([www.banxico.org.mx](http://www.banxico.org.mx)). La información se puede descargar a través de la dirección electrónica siguiente:

México, D.F.

[www.banxico.org.mx/SieInternet/consultarDirectorioInternetAction.do?accion=consultarCuadroAnalitico&idCuadro=CA18&sector=6&locale=es](http://www.banxico.org.mx/SieInternet/consultarDirectorioInternetAction.do?accion=consultarCuadroAnalitico&idCuadro=CA18&sector=6&locale=es)

El periodo hábil disponible es del 2 de enero de 1992 al 9 de febrero de 2011 (4803 observaciones).

*Observación.* El 22 de diciembre de 1994 se pasó de un régimen semifijo a un régimen de flotación.

El periodo hábil utilizado para estimar los parámetros  $\alpha$ -estables es del 22 de diciembre de 1994 al 9 de febrero de 2011 (4058 observaciones).

El conjunto de datos del tipo de cambio interbancario pesos por dólar con precio de cierre para comprar dólares se puede observar en la gráfica siguiente:

<http://congreso.investiga.fca.unam.mx>

[informacongreso@fca.unam.mx](mailto:informacongreso@fca.unam.mx)

Teléfonos

52 (55) 5622.84.90

52 (55) 5622.84.80

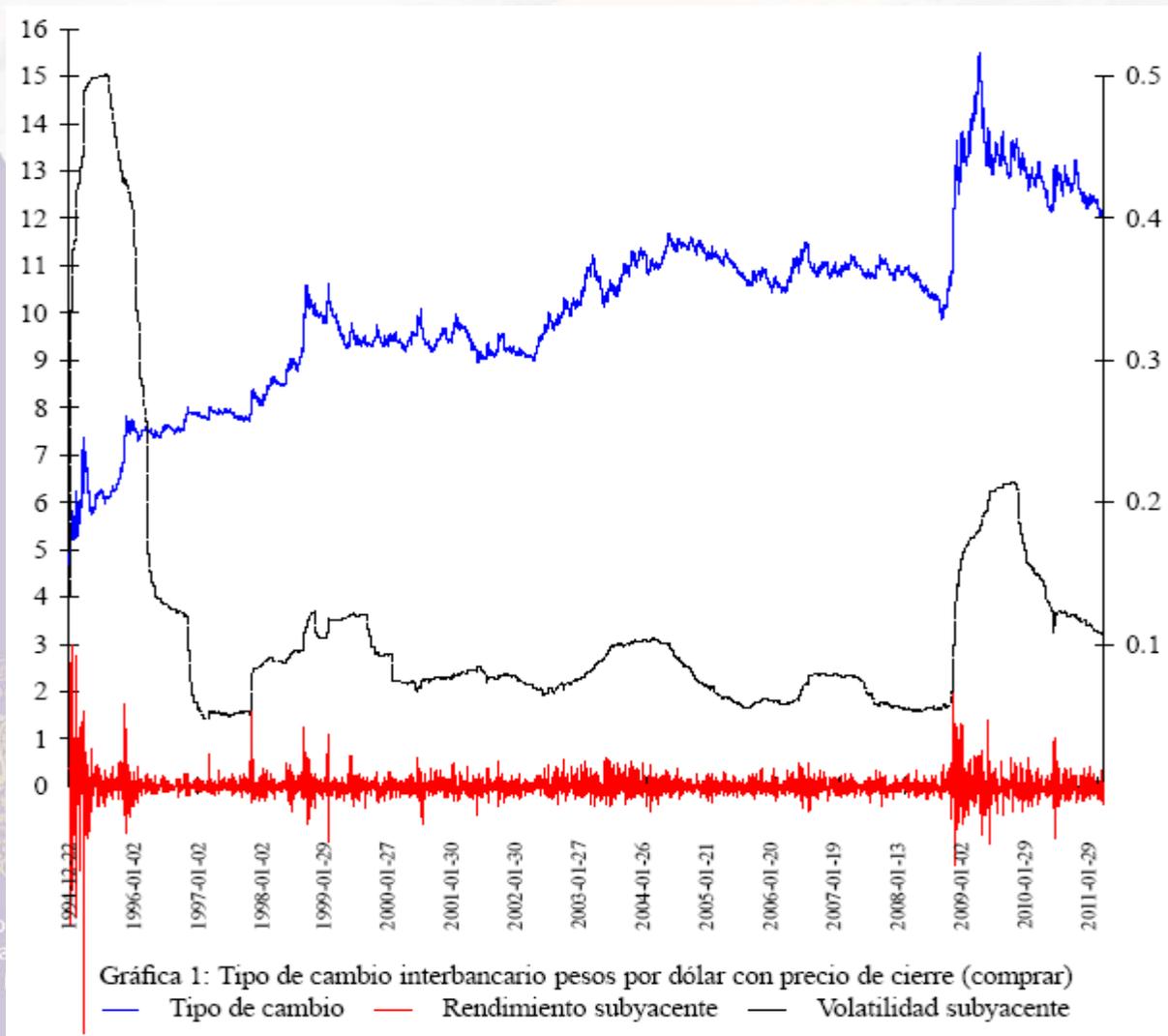
Fax

52 (55) 5616.03.08



**ANFECA**  
Asociación Nacional de Facultades y  
Escuelas de Contaduría y Administración

División de Investigación, Facultad de Contaduría y Administración, UNAM  
Circuito Exterior s/n, Ciudad Universitaria, México, D.F., C.P. 04510



Durante el periodo hábil del 22 de diciembre de 1994 al 9 de febrero de 2011 se puede observar que existen periodos de estabilidad financiera (volatilidad no creciente) y periodos de crisis financieras (volatilidad creciente). Los periodos de estabilidad financiera son de duración más larga que los periodos de crisis financiera y en los periodos de estabilidad se puede observar que las crisis financieras son de escala diferente, por lo que cada periodo de estabilidad financiera tiene alguna relación estadística con el periodo completo. La repetición de las características estadísticas en escalas diferentes permite observar que los periodos de estabilidad son alguna reproducción del periodo completo y estos periodos de estabilidad se repiten en escalas diferentes.

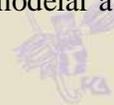
La autosimilaridad del tipo de cambio interbancario para comprar dólares puede tener origen debido a la volatilidad elevada, los incrementos independientes y las colas pesadas en la función de distribución de probabilidad, por lo cual se puede modelar a través de los procesos  $\alpha$ -estables.

<http://coinformacongreso@fca.unam.mx>

Teléfonos

52 (55) 5622.84.90  
52 (55) 5622.84.80

Fax 52 (55) 5616.03.08



División de Investigación, Facultad de Contaduría y Administración, UNAM  
Circuito Exterior s/n, Ciudad Universitaria, México, D.F., C.P. 04510

## Parámetros estadísticos básicos del rendimiento subyacente

Los parámetros estadísticos básicos del rendimiento logarítmico del tipo de cambio con precio de cierre para comprar dólares se pueden calcular a través del programa STABLE.EXE<sup>1</sup> y se presentan en la tabla siguiente:

PARÁMETRO	VALOR
Observaciones	4058.00000000
Rendimientos nulos	59.00000000
Valor mínimo	-0.17338204
Valor máximo	0.09962984
Media	0.00023200
Desviación estándar	0.00866914
Coefficiente de asimetría	-1.22650000
Coefficiente de curtosis	69.08200000

**Tabla 1:** Parámetros estadísticos básicos del rendimiento logarítmico del tipo de cambio

## Estimar los parámetros $\alpha$ -estables

Para estimar los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$ , el programa STABLE.EXE debe analizar la serie de tiempo del rendimiento logarítmico a través de los tres métodos siguientes:

1. Estimación de verosimilitud máxima (MV).
2. Tabulación por cuantiles de las distribuciones  $\alpha$ -estables (MT).
3. Regresión sobre la función característica de la muestra (MR).

Octubre 5, 6 y 7 de 2011

Los valores de los parámetros estimados para la función de distribución de probabilidad  $\alpha$ -estable a través de la parametrización estándar  $S_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  propuesta por *Samorodnitsky–Taqqu* obtenidos a través del programa STABLE.EXE se pueden observar en la tabla siguiente:

MÉTODO	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
Verosimilitud máxima	1.4549	0.2046	0.00297270	0.000416887
Tabulación por cuantiles	1.4025	0.1820	0.00285664	0.000427226
Regresión	1.4351	0.1136	0.00261615	0.000162272
Distribución Normal	2.0000	0.0000	0.00613001	0.000232001

**Tabla 2:** Valores de los parámetros estimados de la función de distribución  $\alpha$ -estable

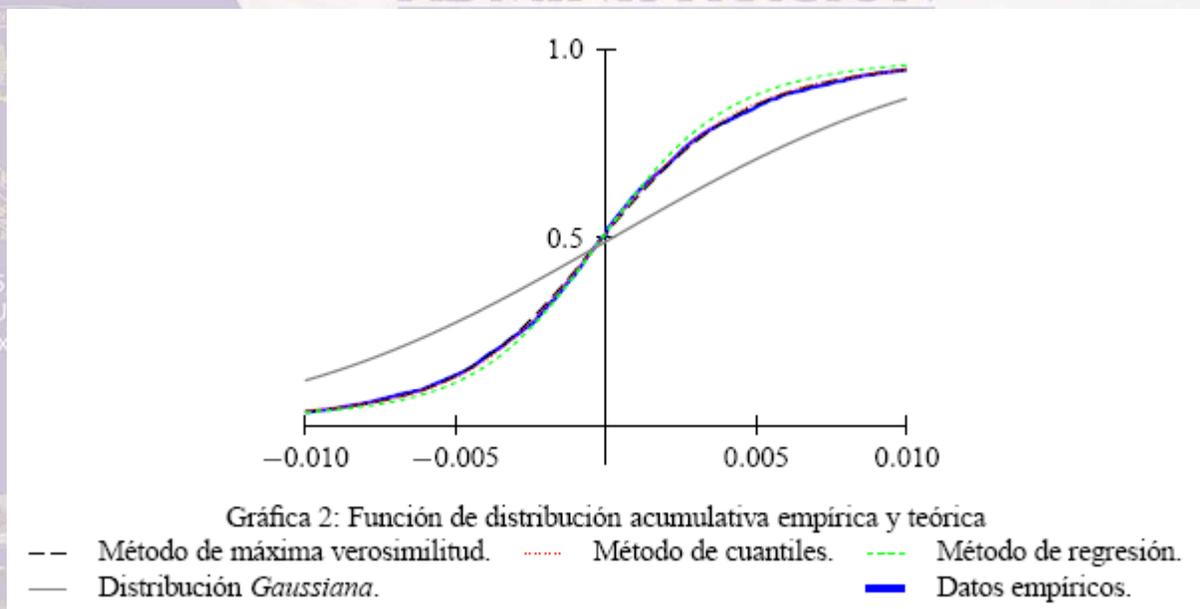
## Analizar cualitativamente el ajuste de los datos

Para seleccionar el método que se ajusta mejor a los datos empíricos se puede realizar la simulación de las funciones de distribución de probabilidad empleando el algoritmo de *Chambers–Mallow–Stuck* para cada método y posteriormente se debe realizar el análisis visual en el ajuste de las colas de la función de distribución acumulativa ( $x < 0$ ) empírica y de la función de distribución acumulativa complementaria ( $x > 0$ ) empírica.

## Analizar visualmente el ajuste de los datos

El rango,  $(-0.173382, 0.09963)$ , del rendimiento logarítmico del tipo de cambio para comprar dólares se puede dividir en 4058 intervalos de longitud 0.00006728 para obtener la función de distribución acumulativa empírica y a través del programa STABLE.EXE se puede obtener la función de distribución acumulativa teórica para los tres métodos y para la función de distribución acumulativa Normal.

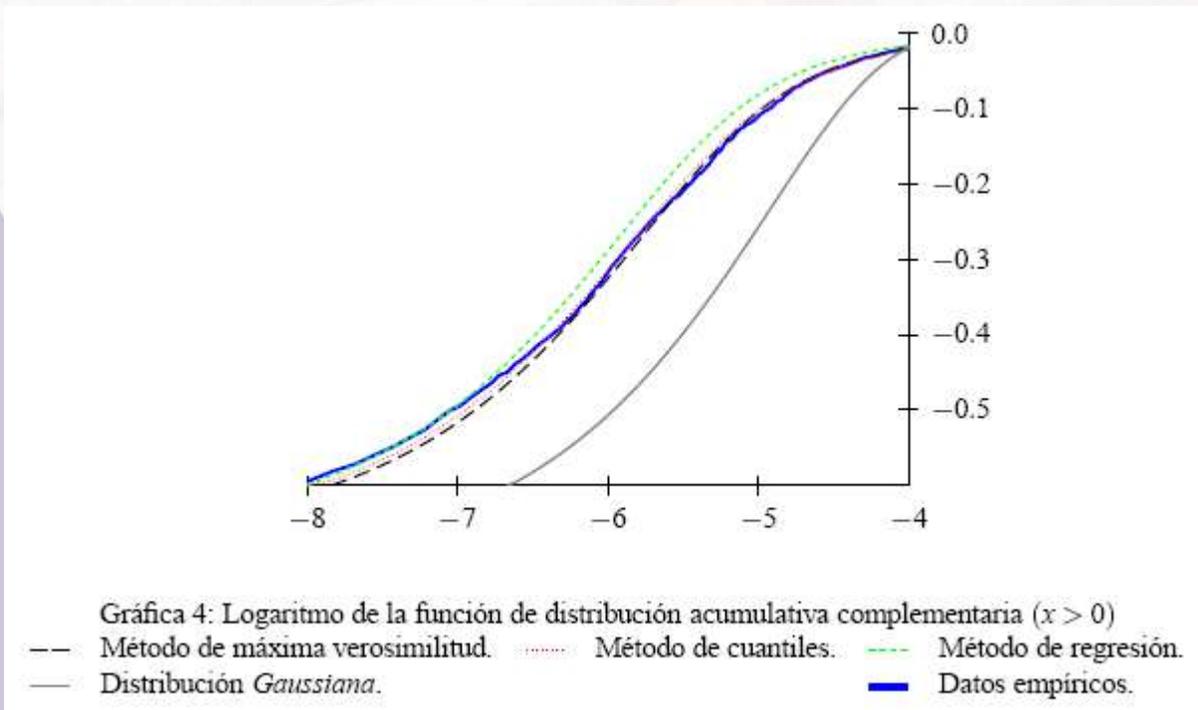
La función de distribución acumulativa empírica y teórica para cada método se puede observar en la gráfica siguiente:



Para realizar el análisis visual por ajustar el rendimiento logarítmico del tipo de cambio que presenta la función de distribución acumulativa empírica y la función de distribución acumulativa obtenida por los métodos utilizados y la distribución Normal se puede graficar el logaritmo de la función de distribución acumulativa del rendimiento logarítmico

acumulativa complementaria del rendimiento logarítmico





### Analizar cuantitativamente el ajuste de los datos

Después de realizar el análisis visual en el ajuste de las colas de la función de distribución acumulativa complementaria se puede realizar la prueba de bondad de ajuste de *Kolmogorov–Smirnov* y  $\chi^2$  para probar cuantitativamente la hipótesis nula de que el mejor ajuste de la función de distribución acumulativa es el que se obtiene por el método de estimación de verosimilitud máxima.

### Hipótesis (*Kolmogorov–Smirnov*)

Para muestras de tamaño grande, el parámetro unilateral de *Kolmogorov–Smirnov* puede plantear las hipótesis siguientes:

$H_0$ : El rendimiento logarítmico del tipo de cambio se distribuye  $\alpha$ -estable.

$H_1$ : El rendimiento logarítmico del tipo de cambio no se distribuye  $\alpha$ -estable.

### Estadístico (*Kolmogorov–Smirnov*)

El estadístico para contrastar la prueba de hipótesis es el siguiente:

$$D = \max_{1 \leq k \leq n} \left| \hat{F}_X(x_k) - F_X(x_k) \right|$$

Donde  $x_k$  es el  $k$ -ésimo rendimiento logarítmico del tipo de cambio (ordenados de menor a mayor),  $\hat{F}_X(x_k)$  es la función de distribución acumulativa empírica y  $F_X(x_k)$  es la función de distribución acumulativa teórica.

El estadístico para cada método utilizado para estimar los parámetros  $\alpha$ -estables se presenta en la tabla siguiente:

MÉTODO	ESTADÍSTICO $D$
Verosimilitud máxima	0.0153
Tabulación por cuantiles	0.0125
Regresión	0.0350
Distribución Normal	0.1425

**Tabla 3:** Estadístico *Kolmogorov–Smirnov*

### Valor crítico del estadístico (*Kolmogorov–Smirnov*)

El valor crítico del estadístico  $D_\alpha$  se puede calcular de la forma siguiente:

$$D_\alpha = \frac{c_{1-\alpha}}{k \cdot n}$$

### Nivel de confianza (*Kolmogorov–Smirnov*)

Los valores para el nivel de confianza se pueden encontrar en la tabla siguiente:

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN	NIVEL DE CONFIANZA ( $c_{1-\alpha}$ )		
	0.90	0.95	0.99
General (parámetros conocidos)	1.224	1.358	1.628
Normal	0.819	0.895	1.035

**Tabla 4:** Valores para el nivel de confianza de la función de distribución

### Tamaño de la muestra (*Kolmogorov–Smirnov*)

Los valores para el tamaño de la muestra se pueden encontrar en la tabla siguiente:

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN	TAMAÑO DE LA MUESTRA ( $k(n)$ )
General (parámetros conocidos)	$\sqrt{n} + 0.12 + \frac{0.11}{\sqrt{n}}$
Normal	$\sqrt{n} - 0.01 + \frac{0.85}{\sqrt{n}}$

**Tabla 5:** Valores para el tamaño de la muestra de la función de distribución

de la muestra y se debe rechazar la hipótesis nula  $H_0$  de que el rendimiento logarítmico del tipo de cambio se distribuye Normal. El método de regresión sobre la función característica de la muestra tiene el máximo cuando  $x > 0$ .

Por lo tanto la estimación por el método de verosimilitud máxima es aceptada.

### Hipótesis ( $\chi^2$ )

Para determinar si el rendimiento logarítmico del tipo de cambio se distribuye  $\alpha$ -estable se pueden plantear las hipótesis siguientes:

$H_0$ : El rendimiento logarítmico del tipo de cambio se distribuye  $\alpha$ -estable.

$H_1$ : El rendimiento logarítmico del tipo de cambio no se distribuye  $\alpha$ -estable.

### Estadístico ( $\chi^2$ )

Para determinar si el rendimiento logarítmico del tipo de cambio se distribuye  $\alpha$ -estable, el rango se puede dividir en cincuenta intervalos iguales para comparar las frecuencias observadas y las frecuencias teóricas en cada intervalo.

El estadístico para contrastar la prueba de hipótesis es el siguiente:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^n \frac{(f_{O_k} - f_{E_k})^2}{f_{E_k}}$$

Donde  $f_{O_k}$  es la  $k$ -ésima frecuencia observada del rendimiento logarítmico del tipo de cambio con precio de cierre para comprar dólares y  $f_{E_k}$  es la  $k$ -ésima frecuencia teórica.

El estadístico de cada método utilizado para estimar los parámetros  $\alpha$ -estables se presenta en la tabla siguiente:

MÉTODO	ESTADÍSTICO $\chi^2$
Verosimilitud máxima	12.5409
Tabulación por cuantiles	27.9447
Regresión	77.2852
Distribución Normal	3,710.5188

**Tabla 6:** Estadístico  $\chi^2$

### Valor crítico del estadístico ( $\chi^2$ )

Los valores para el nivel de confianza y grados de libertad necesarios se pueden encontrar en la tabla siguiente:

<http://comunicacion.unam.mx>

[informacongreso@fca.unam.mx](mailto:informacongreso@fca.unam.mx)

Teléfonos

52 (55) 5622.84.90

52 (55) 5622.84.80

Fax 52 (55) 5616.03.08



GRADOS DE LIBERTAD ( $\nu$ )	NIVEL DE SIGNIFICACIÓN ( $\alpha$ )		
	0.10	0.05	0.01
7	12.0170	14.0671	18.4753
10	15.9872	18.3070	23.2093
11	17.2750	19.6751	24.7250

**Tabla 7:** Valores para el nivel de confianza de la función de distribución  $\chi^2_{\alpha,\nu}$

Los resultados de la prueba de bondad de ajuste  $\chi^2$  se presentan en la tabla siguiente:

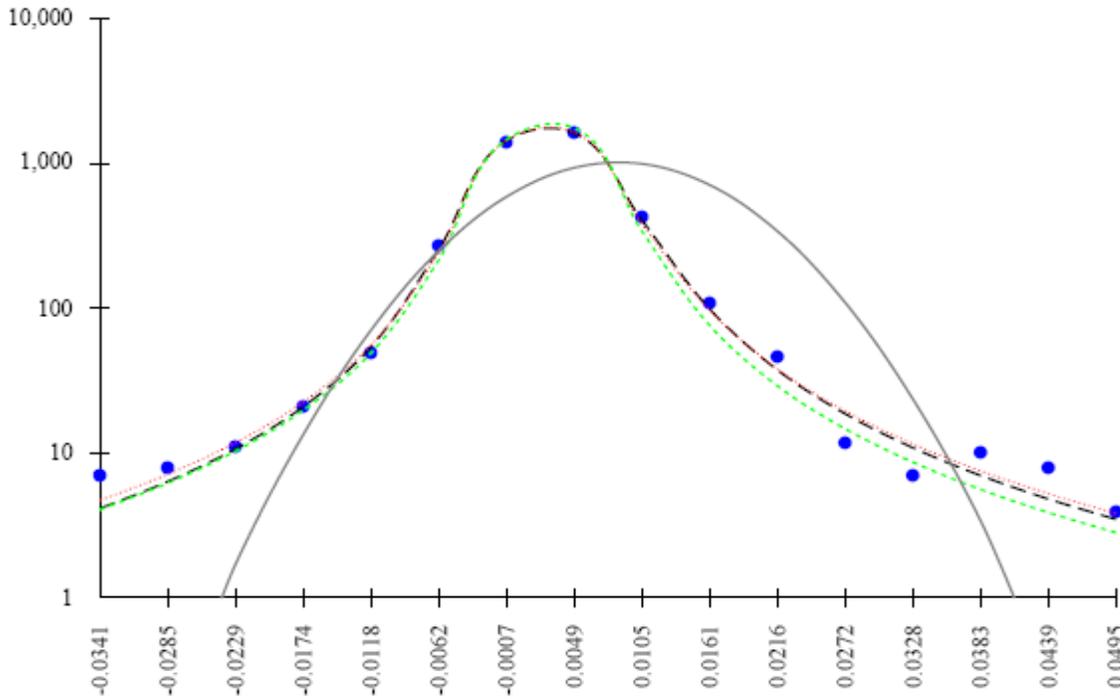
MÉTODO	$\chi^2$	$\nu$	$\chi^2_{0.10,\nu}$	$\chi^2_{0.05,\nu}$	$\chi^2_{0.01,\nu}$	RESULTADO
Verosimilitud máxima	12.5409	10	15.9872	18.3070	23.2093	Aceptar $H_0$
Tabulación por cuantiles	27.9447	11	17.2750	19.6751	24.7250	Rechazar $H_0$
Regresión	77.2852	10	15.9872	18.3070	23.2093	Rechazar $H_0$
Distribución Normal	3,710.5188	7	12.0170	14.0671	18.4753	Rechazar $H_0$

**Tabla 8:** Resultados de la prueba de bondad de ajuste  $\chi^2$

Entonces con el nivel de significación del 5% y 10 grados de libertad se puede aceptar la hipótesis nula  $H_0$  de que el rendimiento logarítmico del tipo de cambio se distribuye  $\alpha$ -estable al utilizar el método de estimación de verosimilitud máxima y  $S_1(1.4549, 0.2046, 0.0029727, 0.000416887)$ .

Por lo tanto la estimación por el método de verosimilitud máxima es aceptada.

El rendimiento logarítmico observado  $x, f_{o_k} \mid x, \log f_{o_k}$  y el rendimiento logarítmico teórico del tipo de cambio  $x, f_{E_k} \mid x, \log f_{E_k}$  se puede observar en la gráfica siguiente:



Gráfica 5: Logaritmo de la frecuencia del rendimiento logarítmico del tipo de cambio  
 --- Método de máxima verosimilitud.    ..... Método de cuantiles.    - - - - Método de regresión.  
 — Distribución Gaussiana.    • Datos empíricos.

### Modelo para valorar opciones europeas en mercados $\alpha$ -estables

Octubre 5, 6 y 7 de 2011

Ciudad Universitaria, México, D.F.

A través del enfoque de probabilidad se puede utilizar la medida neutral al riesgo equivalente propuesta

en [8], el modelo propuesto en [17] y al suponer que los inversionistas se encuentran en algún mercado neutral al riesgo, entonces el rendimiento esperado es la tasa de interés libre de riesgo y el rendimiento logarítmico se puede representar por la ecuación diferencial estocástica siguiente:

$$d \ln M_t = i - r_t + dY_t \quad (1.16)$$

Donde  $Y_t \sim S_1\left(\alpha, \beta, \gamma \tau^{\frac{1}{\alpha}}\right)$  y  $\tau = T - t$ .

### Intervalo de confianza para el tipo de cambio peso-dólar

Si el precio subyacente es  $M_t = 12.0495$ ,  $Z \sim S_1(1.445, 0.205)$  y  $\gamma = 0.132922405$  entonces al término de tres meses el intervalo de confianza del 95% es  $M_T \in [9.9321, 16.2345]$ , por lo que para valorar opciones europeas de venta sobre dólar se utilizan los factores siguientes:

<http://congreso.investigacion.unam.mx>

[informacongreso@fca.unam.mx](mailto:informacongreso@fca.unam.mx)

Teléfonos

52 (55) 5622.84.90

52 (55) 5622.84.80

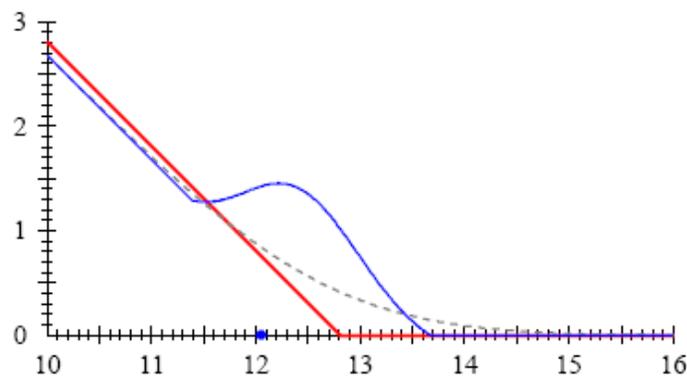
Fax 52 (55) 5616.03.08



División de Investigación, Facultad de Contaduría y Administración, UNAM  
 Circuito Exterior s/n, Ciudad Universitaria, México, D.F., C.P. 04510

FACTOR	VALOR
Precio subyacente	$M_t \in [9.9, 16.3]$
Volatilidad subyacente	$\gamma = 0.1329$
Tasa de interés libre de riesgo nacional	$i = 0.0425$
Tasa de interés libre de riesgo extranjera	$r = 0.0015$
Precio de liquidación	$S = 12.8100$
Tiempo de vigencia	$\tau = 0.2500$

### Precio de las opciones europeas de venta en función del precio subyacente



Gráfica 6: Precio de las opciones europeas de venta sobre dólar americano ( $M_t$ )  
 — Valor intrínseco. --- Modelo *Black-Scholes*. — Modelo  $\alpha$ -estable.

Octubre 5, 6 y 7 de 2011

### Conclusiones

Los parámetros de estabilidad y sesgo para del tipo de cambio peso–dólar obtenidos en la investigación presente son consistentes con los resultados que se presentan en [7] para el tipo de cambio US–YEN y con los que son obtenidos en [3] para los 4,444 rendimientos del tipo de cambio JPY–USD durante el periodo del 1 de enero de 1978 al 31 de junio de 1991.

Las pruebas de bondad de ajuste de *Kolmogorov–Smirnov* y  $\chi^2$  tienen las limitaciones siguientes:

1. La prueba de bondad de ajuste de *Kolmogorov–Smirnov* es más sensible a la parte central de la función de distribución de probabilidad y subestima las colas de la función de distribución.
2. La prueba de bondad de ajuste  $\chi^2$  es sensible a la elección del número de intervalos.

Al tener evidencia de que el rendimiento logarítmico del tipo de cambio peso–dólar para comprar dólares se distribuye  $\alpha$ -estable se puede utilizar el modelo de momentos finitos del proceso log-estable y valuación de opciones, propuesto en [4] y la medida neutral al riesgo equivalente para evaluar opciones bajo incertidumbre log-estable propuesto en [8].

http://cor  
informac

Teléfonos

52 (55) 5622.84.90

52 (55) 5622.84.80

Fax 52 (55) 5616.03.08

ANFECA  
Asociación Nacional de Facultades y  
Escuelas de Contaduría y Administración

División de Investigación, Facultad de Contaduría y Administración, UNAM  
Circuito Exterior s/n, Ciudad Universitaria, México, D.F., C.P. 04510



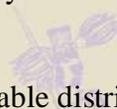
## Referencias

- [1] Louis Jean Baptiste Alphonse Bachelier.  
Théorie de la spéculation. PhD thesis, Sorbonne,  
[www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1900\\_3\\_17\\_21\\_0\\_1900](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1900_3_17_21_0_1900).  
Annales scientifiques de l' École Normale Supérieure.
- [2] Fischer Black and Myron Scholes.  
The pricing of options and corporate liabilities.  
The journal of political economy, 81(3):637–654, 1973.
- [3] Szymon Borak; Wolfgang Härdle y Rafal Weron.  
Stable distributions.  
Economic risk, SFB–649(8):1–27, 2005.
- [4] Peter Carr and Liuren Wu.  
The finite moment log stable process and option pricing.  
The journal of finance, LVIII(2):753–778, 2003.
- [5] S. R. Hurst, E. Platen, and S. T. Rachev. Option pricing for a logstable asset price model.  
Mathematical and computer modelling, 29:105–119, 1999.
- [6] J. Huston McCulloch.  
Simple consistent estimators of stable distribution parameters.  
Communications in statistics – Simulation and computation, 34(3):1109–1136, september 2005.
- [7] J. Huston McCulloch.  
Stable distributions and term structure of interest rates.  
Mathematical and computer modelling, 29:57–60, 1999.
- [8] J. Huston McCulloch.  
The risk-neutral measure and option pricing under log–stable uncertainty.  
Economics departament. Ohio State University, 2003.
- [9] Christian Menn and Svetolozar T. Rachev.  
Calibrated FFT–based density approximations for  $\alpha$ –stable distributions.  
Computational statistics & data analysis, 50:1891–1904, 2006.
- [10] S. Mittnik and S. T. Rachev.  
Option pricing for stable and infinitely divisible asset returns.  
Mathematical and computer modelling, 29:93–104, 1999.
- [11] John P. Nolan. Parameter estimation and data analysis for stable distributions.  
Systems and Computer, 1:443–447, 1988.
- [12] John P. Nolan. Parameterizations and modes of stable distributions.

<http://informacongreso@fca.unam.mx>

Teléfonos 52 (55) 5622.84.90  
52 (55) 5622.84.80

Fax 52 (55) 5616.03.08



ANFECA

Asociación Nacional de Facultades y Escuelas de Contaduría y Administración

División de Investigación. Facultad de Contaduría y Administración, UNAM  
Circuito Exterior s/n, Ciudad Universitaria, México, D.F., C.P. 04510

Statistics & probability letters, 38:187–195, 1998.

[13] J. P. Nolan.

Stable Distributions – Models for Heavy Tailed Data.

Birkhauser, Boston, 2011.

In progress, Chapter 1 online at [academic2.american.edu/~jpnolan](http://academic2.american.edu/~jpnolan).

[14] Gennady Samorodnitsky and Murad Taqqu.

Stable non-gaussian random processes: Stochastic models with infinite variance. ISBN 0–412–05171–0.

Chapman and Hall, 1994. Primera edición.

[15] Enrico Scalas and Kyungsik Kim.

The art of fitting financial time series with levy stable distributions.

Munich personal RePEc archive, August(336):1–17, 08 2006.

[mpa.ub.uni-muenchen.de/336](http://mpa.ub.uni-muenchen.de/336).

[16] Francisco Venegas-Martínez.

Riesgos financieros y económicos: Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre.

ISBN–13: 978–970–830–008–7.

Cengage Learning Latin America, 2008. Segunda edición.

[17] Francisco Venegas-Martínez y César Emilio Contreras Piedragil.

Valuación de opciones sobre activos subyacentes con distribuciones estables.

Estocástica, 1(1):55–71, enero–junio 2011.

Octubre 5, 6 y 7 de 2011

Ciudad Universitaria  
México, D.F.

[18] Vladimir Mikhailovich Zolotarev Zolotarev.

One–dimensional stable distributions. ISBN 0–8218–4519–5.

American Mathematical Society, 1986. Primera edición.

<http://congreso.investiga.fca.unam.mx>

[informacongreso@fca.unam.mx](mailto:informacongreso@fca.unam.mx)

Teléfonos

52 (55) 5622.84.90

52 (55) 5622.84.80

Fax

52 (55) 5616.03.08



División de Investigación, Facultad de Contaduría y Administración, UNAM  
Circuito Exterior s/n, Ciudad Universitaria, México, D.F., C.P. 04510