

# Memoria de largo plazo en el índice S&P 500: Un enfoque fractal aplicando el coeficiente de Hurst con el método R/S

Área de investigación: Finanzas

## Stephanie Rendón de la Torre

Facultad Contaduría y Administración  
Universidad Nacional Autónoma de México  
México

[chicayeyef@hotmail.com](mailto:chicayeyef@hotmail.com)

## Arturo Morales Castro

Facultad Contaduría y Administración  
Universidad Nacional Autónoma de México  
México

[amorales@fca.unam.mx](mailto:amorales@fca.unam.mx), [arturo\\_moralesc@yahoo.com.mx](mailto:arturo_moralesc@yahoo.com.mx)



Octubre 3, 4 y 5 de 2012  
Ciudad Universitaria  
México, D.F.

XVII  
CONGRESO  
INTERNACIONAL  
DE  
CONTADURÍA  
ADMINISTRACIÓN  
E  
INFORMÁTICA

Diseno: FCA, Maritza Alvarez Pineda / Montajes: Fotografías: Rocio Lopez-Chavez

<http://congreso.investiga.fca.unam.mx>

[informacongreso@fca.unam.mx](mailto:informacongreso@fca.unam.mx)

Teléfonos

52 (55) 5622.84.90

52 (55) 5622.84.80

Fax

52 (55) 5616.03.08



**ANFECA**  
Asociación Nacional de Facultades y  
Escuelas de Contaduría y Administración

División de Investigación, Facultad de Contaduría y Administración, UNAM  
Circuito Exterior s/n, Ciudad Universitaria, México, D.F., C.P. 04510

## Memoria de largo plazo en el índice S&P 500: Un enfoque fractal aplicando el coeficiente de Hurst con el método R/S

### Resumen

El coeficiente de Hurst tiene diversas aplicaciones, y una de ellas sin duda es para el pronóstico de tendencias en mercados financieros. Esta investigación se trata del análisis del coeficiente de Hurst obtenido mediante la metodología R/S (o de rango escalado) aplicada al índice S&P 500 utilizando series de datos de precios diarios publicados de la base de datos de Bloomberg, por los años de 1928-2012, con la finalidad evaluar las características no lineales, fractales y de comportamiento persistente (si lo hay) de las series de tiempo estudiadas, evaluar los efectos del ruido blanco, determinar si es posible pronosticar tendencias con la ayuda de este tipo de análisis, delinear las posibilidades que existen para el estudio del análisis fractal, y encontrar las alternativas a seguir en este planteamiento de investigación. El presente trabajo es novedoso en el sentido de que al día de hoy no hay análisis actuales (encontrados) al índice S&P 500, así como tampoco se ha realizado un estudio formal del análisis R/S considerando series de datos a partir del primer dato disponible a la actualidad y precisamente, éste es el objeto de estudio de esta investigación. El índice de precios y cotizaciones S&P 500 se considera el índice más representativo de los mercados financieros y uno de los más importantes índices mundiales.

Finalmente, se busca proponer una alternativa viable de investigación que sea más concordante con la crítica al comportamiento aleatorio de precios y rendimientos, reconociendo que la distribución gaussiana debe ser sustituida por alguna de la familia de distribuciones estables de Pareto (distribuciones leptocúrticas y colas gordas), y es precisamente la naturaleza fractal de las cosas la que obliga a replantear este sendero como una alternativa de investigación y a continuar la búsqueda en la experimentación y modelización que verdaderamente se apegue a los hechos reales y no únicamente a las verdades empíricas.

**Palabras clave:** Coeficiente de Hurst, Método R/S, ruido blanco, memoria de largo plazo, fractal.



# Memoria de largo plazo en el índice S&P 500: Un enfoque fractal aplicando el coeficiente de Hurst con el método R/S

## Introducción

Una aplicación poco explorada del coeficiente de Hurst es el pronóstico de tendencias en mercados financieros. Esta investigación versa sobre el análisis del coeficiente de Hurst obtenido mediante la metodología R/S (rango escalado) aplicada al índice S&P 500 utilizando su serie de datos de precios diarios publicados de la base de datos de Bloomberg, para los años de 1928-2012, con la finalidad de evaluar las características no lineales, fractales y de comportamiento persistente (si lo hay), evaluar los efectos del ruido blanco, determinar si es posible pronosticar tendencias con la ayuda de este tipo de análisis, delinear las posibilidades que existen para el estudio del análisis fractal en finanzas, así como encontrar las alternativas a seguir en este planteamiento de investigación. Finalmente, se busca proponer una alternativa viable de investigación que sea más concordante con la crítica al comportamiento aleatorio de precios y rendimientos, reconociendo que la distribución gaussiana debe ser sustituida por alguna de la familia de distribuciones estables de Pareto (distribuciones leptocúrticas y colas gordas), y es precisamente la naturaleza fractal de las cosas la que obliga a replantear este sendero como una alternativa de investigación y a continuar la búsqueda en la experimentación y modelización que verdaderamente se apegue a los hechos reales y no únicamente a las teorías.

"Toda belleza es relativa... No hemos de... creer que las orillas del mar sean realmente deformes por no tener la forma de un baluarte regular; que las montañas hayan perdido la forma porque no son exactamente como pirámides o conos; ni que las estrellas estén situadas desmañadamente por no estar a una distancia uniforme. Estas irregularidades no son naturales, sino sólo porque lo que respecta a nuestros gustos; ni resultan incómodas para los verdaderos usos de la vida y de los designios de la vida del hombre en la tierra"... Mandelbrot (1970, p.22) cita a Richard Bentley sabio inglés del siglo XVII.

¿Por qué ninguna de las figuras geométricas que presenta la naturaleza se describe por las figuras que conocemos? Cuadrado, rombo, círculo, triángulo... Una montaña, un árbol, una hoja de una planta, la forma de un rayo, una nube. Es imposible describir o medir la forma exacta de la naturaleza con la geometría euclidiana. La naturaleza presenta formas más complejas, irregulares, fragmentadas, con dimensiones fractales, identificando así una serie de formas que Mandelbrot (1970) llamó fractales, y que en otra época se les denominó como monstruosas o patológicas. Parafraseo aquí la famosa proclama de Charles Hermite que plasmó en 1893 en una carta que dirigió al matemático Thomas Jan Stieltjes, en la que declaraba que "abandonaba con horror y espanto la lamentable plaga de funciones sin derivadas", esas curvas sin tangentes que durante tantos años se dejaron en el olvido de los matemáticos por encontrarse horrorizados de los monstruos y figuras patológicas encontradas. Tiempo después Mandelbrot, retomó el tema y dedicó muchos años de su vida al estudio de los monstruos y sus aplicaciones. Hay muchos estudios que comprueban el comportamiento fractal y su inherencia a la naturaleza, por ejemplo, en biología se han podido describir los cambios ontogenéticos en el árbol bronquial de mamíferos (Canals,

52 (55) 5622.84.90

52 (55) 5622.84.80

Fax 52 (55) 5616.03.08

Olivares, Labra, Caputo, Rivera & Novoa, 1998; Canals, Olivares, Labra & Novoa, 2000), variabilidad del ritmo cardiaco (García, 1998), ciclos respiratorios (Hoop, Kazemi & Leibovitch, 1993) y sistemas vasculares (Masters, 2004). En física fenómenos como las turbulencias, la geometría de las nubes y de las costas (Mandelbrot, 1970), las fracturas de los vidrios (Hinojosa & Chávez, 2001), la electrodeposición del zinc (Mas, Mach, Trigueros, Claret & Sagués, 1996), Mandelbrot hizo un estudio en relación a los precios del algodón (1963), Edgar Peters también detectó comportamientos fractales en los mercados financieros junto con (Mantenga, Palágyi & Stanley, 1999; Mansilla, 2003), por lo que extrapolando este orden de ideas no debería extrañarnos que el comportamiento del mismo hombre al ser parte de la naturaleza tenga patrones fractales, en cuanto a sus emociones, sentimientos, ideas, etc. Por lo tanto el estudio de los fractales es de grandísima utilidad e importancia. Una aplicación valiosísima de la teoría fractal es precisamente en las finanzas y en la economía. Diversos autores como Cantor (1858), Peano (1889), Poincaré (1902), Mandelbrot (1970), Bachelier (1910), Fama (1965), Peters (1991), Julia (1918), Sierpinski (1964), Hurst (1951), Feder (1988), Wiener (1958), Laplace (1781), Levy (1975), entre otros., han sido antecesores y precursores de estas teorías del caos y fractales.

En particular el trabajo de Hurst (1951) y la construcción del coeficiente “H”, que vale la pena mencionar que cuando el hidrólogo Harold Edwin Hurst (1951) lo descubrió no lo nombró como “H” sino como “K”, y años después fue Mandelbrot en los sesentas quien en su honor renombró dicho coeficiente como “H” (Mandelbrot et al., 2006). El coeficiente de Hurst tiene diversas aplicaciones, entre ellas, el pronóstico de tendencias en series de tiempo.

¿Por qué es cuestionado el funcionamiento de la teoría gaussiana y la famosa Hipótesis de Mercados Eficientes en los mercados financieros? En general, decimos que debido a que:

1. Existen grandes cambios en los precios, y son mucho más frecuentes de lo que establece la teoría gaussiana; las observaciones reales son de naturaleza leptocúrtica, es decir los cambios de precios no tienen distribución gaussiana.
2. Hay cambios fuertes y disparados en los precios que se producen en el tiempo y dan la impresión de que deben ser explicados de manera causal y no casual pues no se explican estocásticamente.
3. Las series temporales no parecen ser estacionarias. La varianza difiere muchísimo en los distintos periodos, y tiene tendencia al infinito.
4. Los cambios en los precios no parecen ser independientes e incluso se muestra gran diversidad de patrones.

Esta investigación trata del análisis del coeficiente de Hurst obtenido mediante la metodología R/S (rango escalado) aplicada al índice S&P 500 utilizando la serie de datos de precios diarios publicados de la base de datos de Bloomberg, por los años de 1928-2012, con la finalidad de evaluar las características no lineales, fractales y de comportamiento persistente (si lo hay) de la serie de tiempo estudiada en secciones, evaluar los efectos del

ruido blanco, determinar si es posible pronosticar tendencias con la ayuda de este tipo de análisis, delinear las posibilidades que existen para el estudio del análisis fractal, y encontrar las alternativas a seguir en este planteamiento de investigación. El presente trabajo es novedoso en el sentido de que al día de hoy no hay análisis R/S actualizados (encontrados), considerando datos a partir de la primer observación disponible a la actualidad y precisamente, éste es el objeto de estudio de esta investigación. El índice de precios y cotizaciones S&P 500 se considera el índice más representativo de los mercados financieros y uno de los más importantes índices mundiales. Finalmente, se busca proponer una alternativa viable de investigación que concuerde con la realidad.

### Estudios previos

Existen diversos autores que han encontrado evidencia de que los mercados financieros presentan memoria de largo plazo, Espinosa (2007) en la Universidad de Santo Tomás de Chile, donde utiliza el análisis R/S para confirmar la dependencia a largo plazo de índices de bolsa de México, Brasil, Argentina y Chile, cita a Greene y Fielitz (1977), quienes también utilizaron análisis R/S sobre el índice Dow Jones para comprobar la existencia de memoria a largo plazo y concluyeron que hay comportamiento persistente en dicho índice. Peters (1991,1994) encontró comportamiento persistente en sus análisis R/S realizados al índice S&P 500, así como logró determinar la longitud de ciclos de la memoria a largo plazo en dicho índice. Actualmente, existe una controversia de si lo que se puede determinar es el corto o el largo plazo en un análisis R/S; por su parte Lo (1991) defiende la memoria a corto plazo y es más renuente a creer que se pueda determinar la memoria a largo plazo. En su investigación titulada “*Long term memory in stock market prices*”, el propone un método modificado al R/S de Mandelbrot (llamado rango re-escalado modificado) donde analiza series de tiempo financieras en diferentes periodos, y concluye que una vez que se toman en cuenta las auto correlaciones a corto plazo se rompe la memoria de largo plazo.

Octubre 3, 4 y 5 de 2012

Ciudad

Ibarra (2004) en un ensayo publicado por la Universidad Autónoma de Nuevo León, realiza un estudio bajo la lupa de la economía dinámica caótica al tipo de cambio peso/dólar y llega a la conclusión de que la dinámica de los tipos de cambio es caótica y compleja, utilizando análisis R/S y BDS para su estudio. Muller (2008) en su tesis realizada en el Instituto Politécnico Nacional sobre la tasa de interés y métodos fractales y neuronales, demuestra la susceptibilidad de la tasa de interés ante variaciones en el tipo de cambio a partir de estimaciones obtenidas por métodos fractales y neuronales. Sierra (2007) investigador del Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey, en su trabajo premiado como el primer lugar del Premio Nacional de Derivados en México obtuvo resultados a favor de los procesos de memoria larga sobre procesos Hurst y movimiento browniano para algunos índices y volatilidades de mercados de México y de los Estados Unidos.

<http://congreso.investiga.fca.unam.mx>

[informacongreso@fca.unam.mx](mailto:informacongreso@fca.unam.mx)

Teléfonos

52 (55) 5622.84.90

52 (55) 5622.84.80

Fax

52 (55) 5616.03.08

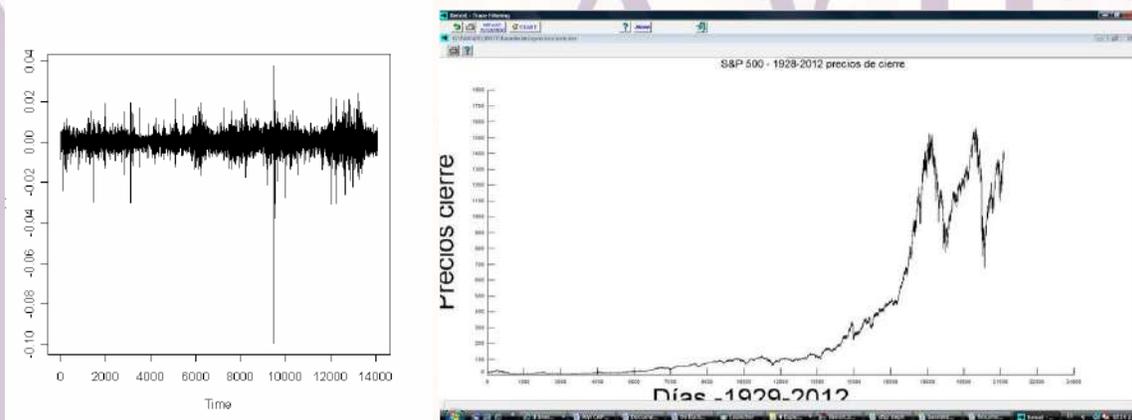


## Metodología

Para el análisis de memoria de largo plazo se consideró la serie del índice S&P del año de 1928 a 2012. (Véase gráfica 1)

Gráfica 1.

Precios de S&P 500 desde 1928-2012 (der), Gráfica de las diferencias logarítmicas en función del tiempo (izq)



Fuente: Elaboración propia con datos de Bloomberg

En esta serie financiera se encontró que presenta características de una distribución ergódica y no estacionaria. La gráfica logarítmica (izquierda) muestra un comportamiento que no aparenta ser aleatorio, sino más bien caótico.

El software utilizado para analizar mediante R/S y el filtrado de ruido blanco de los datos en comento, es BENOIT<sup>1</sup>. Antes de realizar el estudio, se le aplicó un filtro de ruido blanco y minería de datos a la serie y después se aplicó el análisis R/S para la obtención del coeficiente H y se compararon los resultados antes y después del filtro de ruido blanco; finalmente se aplicó una prueba sugerida por Peters (1994) para confirmar la validez de la prueba a las series temporales.

La existencia de dependencia lineal en los datos puede producir valores de  $H > 0.50$  sin que exista realmente un proceso de persistencia o de memoria larga, por eso debemos someter la serie temporal a una filtración de ruido blanco (o bien, ruido sin correlación). Estos procesos de eliminación del ruido blanco, en general, no eliminan la totalidad de la dependencia lineal, pero según Brock, Dechert, Sheinkman, y Lebaron (1987) la pueden reducir a niveles muy bajos, es decir se puede depurar el ruido blanco y reducir bastante los datos que puedan estar desviando el resultado del análisis. Antes de realizar el análisis R/S a la serie temporal se le aplicó un filtro para retirar ruido blanco y minería de datos de su trazo usando técnicas de Fourier; dicho filtro es una técnica que trabaja conduciendo una transformada seguida de una modificación de los coeficientes de la transformada y luego reversando la transformada, de manera que así se remueven datos que contribuyan al ruido que no tengan correlación con la serie temporal. Para este filtro se utilizó el software de BENOIT. Hay otras formas de filtrar los datos, por ejemplo Ibarra (2004), utiliza como

<http://congreso.investigafca.unam.mx>

informacion@congreso@fca.unam.mx

Teléfono

52 (55) 5622.84.90

52 (55) 5622.84.80

Fax

52 (55) 5616.03.08

<sup>1</sup> La empresa Trusoft Int'l Inc desarrolló una herramienta llamada "Benoit Fractal Analysis System". Benoit versión 1.2 es una aplicación que permite calcular la dimensión fractal y el exponente de Hurst de un conjunto de datos mediante distintos métodos.

filtro la función de Daubechies de mínima asimetría MA 8 en un estudio que realiza con *wavelets* para analizar correlaciones de diferentes mercados accionarios.

Posteriormente, se corrió el modelo R/S a los datos sin filtrar y también a los datos filtrados de ruido blanco con el fin de cotejar el impacto del ruido blanco antes y después del filtrado.

## Resultados

Los resultados se presentan en el Cuadro 1 que muestra los coeficientes de Hurst al evaluar la serie de tiempo en secciones con filtro de ruido y sin filtro de ruido:

**Cuadro I.**  
**Resultados de la obtención del coeficiente de Hurst, dimensión fractal y Desviación estándar**

1928-1990			1928-1952		
S&P500	Sin ruido	Con ruido	S&P500	Sin ruido	Con ruido
H	0.561	0.546	H	0.537	0.537
DF	1.439	1.454	DF	1.463	1.463
DE	0.2113	0.0837	DE	0.0723	0.0171

1991-2012			1953-1968		
S&P500	Sin ruido	Con ruido	S&P500	Sin ruido	Con ruido
H	0.548	0.485	H	0.610	0.557
DF	1.452	1.515	DF	1.390	1.443
DE	0.0734	0.0294	DE	0.0665	0.033

1928-2012			1969-1995		
S&P500	Sin ruido	Con ruido	S&P500	Sin ruido	Con ruido
H	0.549	0.535	H	0.570	0.525
DF	1.451	1.465	DF	1.430	1.475
DE	0.2161	0.0652	DE	0.0782	0.0356

1996-2012		
S&P500	Sin ruido	Con ruido
H	0.550	0.477
DF	1.450	1.523
DE	0.0958	0.0394

H = Coeficiente Hurst  
DF= Dimensión Fractal  
DE= Desviación estándar

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos mediante el software Benoit

En el cuadro 1 que muestra los coeficientes de Hurst obtenidos se aprecia que no se afectó más que mínimamente a las tendencias de las series. Para las series menos antiguas (1991-2012 y 1996-2012) que resultaron tener las diferencias más altas entre el coeficiente de H obtenido sin filtro de ruido blanco y H obtenido con filtro de ruido blanco, fueron de 0.063 y 0.073 (restando H sin ruido – H con ruido). Las diferencias menores resultaron de los coeficientes de las series con más datos y más antiguas (1928-1990 y 1928-2012) diferencias de 0.015 y 0.14, respectivamente.

Un resultado interesante fue el de la serie de 1928-1952 porque no hubo diferencias entre la serie con los datos filtrados y con datos no filtrados, el coeficiente fue prácticamente el mismo, lo que refuerza que estas series no están afectadas por el ruido blanco y hace la

conclusión más fuerte de que todas las series con o sin ruido resultaron con  $H > 0.50$ , es decir en todas sus combinaciones analizadas (1928-2012, 1996-2012, 1969-1995, 1953-1968, 1991-2012, 1928-1952) en este estudio resultaron series persistentes con indicios de comportamiento fractal.

Una conclusión directa de este análisis diferencial es que entre más larga sea la serie de tiempo menos impacto tendrá el ruido blanco en la determinación de  $H$ . También se observa que en general las series a las que se les eliminó el ruido los coeficientes de  $H$  resultaron mayores que al permitir ruido blanco, es decir, eliminar el ruido blanco en este caso resultó en reforzar la persistencia de las series, excepto por la serie de los años 1928-1952, donde  $H$  sin ruido fue igual que  $H$  con el ruido.

El análisis R/S permite identificar sistemas dinámicos no lineales, que mantienen procesos de memoria larga, como es el caso de las series de tiempo financieras, y facilita el reconocimiento de las series como fractales. Sin embargo el análisis R/S no determina si hay comportamiento fractal o no, pero es una gran herramienta para detectar comportamiento caótico determinista y verifica si existe movimiento browniano fraccionario en la serie de tiempo y a partir de ahí el siguiente paso sería analizar las propiedades fractales de la serie temporal. Este método, incluso mide la intensidad de dependencia a largo plazo.

Dada la relación:

$$R/S = as^H \quad (1)$$

Donde:

**R/S** : Es el estadístico R/S que depende del tamaño de la serie y que se define como el rango de variación de la serie partido por su desviación típica, con media cero, expresado en términos de la desviación estándar y cuyo análisis es de tipo no paramétrico, ya que no se requiere de una distribución específica.

**a**: es una constante.

**s** : es el número de observaciones,

**H**: es el exponente o coeficiente de Hurst,

Cuando R/S es observado sobre varios valores de  $s$ , se sigue que:

$$\log(R/S) = \log(a) + H \log(s) \quad (2)$$

Para obtener el coeficiente  $H$ , a partir de una serie de tiempo de longitud  $N$ , se divide la serie en un conjunto de subseries de longitud  $s$ . Para cada subserie de longitud  $s$ ,  $R(s)$  y  $S(s)$  son determinados. Entonces se calcula el promedio  $(R(s)/S(s))$  para cada valor de  $s$ . Por el método de mínimos cuadrados ordinarios, una línea es ajustada a través de los puntos que definen la relación entre  $\log(R(s)/S(s))$  y  $\log(s)$ . La pendiente de dicha línea es entonces el coeficiente de Hurst. La fórmula R/S simplemente mide si, sobre intervalos de tiempo variables, el rango de variación de los datos entre el máximo y el mínimo es mayor o menor de lo que se esperaría si cada dato fuera independiente del anterior. Cuando  $H=0.50$  empíricamente, resulta un evento aleatorio puro ya que la serie presenta movimiento browniano tradicional y de ruido blanco, entonces hay independencia contra las hipótesis alternativas ( $H < 0.50$  ó  $H > 0.50$ ) que tienen comportamientos anti persistentes o persistentes,

respectivamente. Cabe mencionar que el análisis R/S no requiere que el proceso subyacente se distribuya de forma normal, únicamente que sea independiente.

Si  $0.50 < H < 1.0$  implica una serie de tiempo persistente, es decir caracterizada por efectos de memoria de largo plazo, de *memoria de elefante*. En otras palabras lo que suceda hoy impactará definitivamente el futuro por siempre, por ejemplo: cambios diarios de “x” periodo que están correlacionados con otros cambios diarios futuros; se dice que hay ruido negro y generalmente aparece en ciclos de largo plazo (Luengas, Ardila y Moreno, 2010).

Si  $0 < H < 0.50$  significa que no hay un nivel de persistencia; se dice que hay una reversión a la media (Luengas, et als. 2010). Si la serie ha estado arriba de un determinado valor que hace las veces de media de largo plazo en el periodo anterior, es más probable que esté abajo en el periodo siguiente y viceversa; se considera ruido rosa.

El análisis R/S realizado para la misma serie se presenta en el cuadro II: Análisis R/S para S&P 500 por precios de cierres diarios (filtrado de ruido blanco):

**Cuadro II**  
**ANALISIS R/S para S&P 500 por precios de cierres diarios (filtrado de ruido blanco)**

ANALISIS R/S para S&P 500 por precios de cierres diarios (filtrado de ruido blanco)					
AÑOS	H	DF	DE	# datos	# de divisores de N desde 10 a (n/2)-1
1928-1990	0.561	1.439	0.2113	15120	69
1991-2012	0.548	1.452	0.0734	5040	49
otros intervalos de tiempo:					
AÑOS	H	DF	DE	# datos	# de divisores de N desde 10 a (n/2)-1
1928-2012	0.549	1.451	0.2161	21148	73
AÑOS	H	DF	DE	# datos	# de divisores de N desde 10 a (n/2)-1
1928-1952	0.537	1.463	0.0723	6120	38
1953-1968	0.610	1.390	0.0665	3360	38
1969-1995	0.570	1.430	0.0782	6720	46
1996-2012	0.550	1.450	0.0958	3960	38

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos mediante el software Benoit

México, D.F.

Después de analizar los resultados obtenidos con el análisis R/S efectuado a las diferentes secciones de la serie de tiempo del índice S&P 500 con el filtrado de ruido blanco el coeficiente H más bajo fue de 0.537 en la serie de 1928-1952 y el más alto fue 0.610 en el periodo de tiempo de 1953-1968. Para la serie completa que va desde 1928-2012:  $H=0.549$  y  $DF= 1.451$ ; ahora bien, si analizamos los resultados del coeficiente de H de todas las secciones de la serie se verá que todos son persistentes, es decir los resultados de esta investigación apuntan hacia la existencia de un comportamiento fractal, es decir con memoria de largo plazo, y es precisamente esto lo que el análisis bursátil persigue, por lo que he aquí cómo el análisis fractal podría coadyuvar en el análisis de tendencias y de gestión de riesgos.

Una conclusión directa de estos resultados es que aunque todos los resultados fueron muy cercanos, entre  $H=0.537$  (el menor) y  $H =0.610$  (el mayor) ningún valor de H se repitió y ninguno resultó de 0.50 o menor (antipersistente); así podríamos decir que desde 1928 hasta 2012 tenemos comportamientos persistentes de largo plazo, sin embargo, aquí vale la pena mencionar que no es lo mismo obtener un  $H=0.537$  que, hipotéticamente un valor de  $H=0.96$ ; es decir, tenemos una conclusión de comportamiento fractal “débil”, algo que se

http://co  
informa

Teléfonos

52 (55) 5622.84.90

52 (55) 5622.84.80

Fax

52 (55) 5616.03.08

Asesoría Nacional de Facultades y  
Escuelas de Contaduría y Administración

División de Investigación, Facultad de Contaduría y Administración, UNAM  
Circuito Exterior s/n, Ciudad Universitaria, México, D.F., C.P. 04510

Diana E. A. Martínez Anelina Méndez Martínez Fotografía: Ricardo López Chávez

podría llamar “ruido gris” y no ruido negro propiamente, por lo que sería interesante aplicar otros métodos alternos al R/S para confirmar los resultados.

Según Díaz Mata (2006) la fuerza del sesgo, depende de qué tan lejos de 0.50 se encuentra H, y por otro, la fuerza de la conducta de reforzamiento de la tendencia aumenta en la medida que el coeficiente de Hurst obtenido se aproxime a 1; aplicando esto al caso en cuestión si el resultado de la serie completa 1928-2012 fue  $H = 0.549$  hay, en esencia una probabilidad de 54.9% de que si el último movimiento fue positivo el siguiente también lo sea.

En otro estudio, un ensayo de Ibarra (2004) se realiza una prueba de R/S al tipo de cambio peso/dólar y se obtiene un coeficiente de  $H = 0.54$  y el autor determina que hay comportamiento persistente. Bayraktar, Poor y Sircar (2004), realizaron pruebas de estimación de dimensión fractal al índice S&P500 (por una serie de tiempo de 11.5 años durante el periodo de 1989-2000 segmentando periodos de 2 meses) y obtuvieron que la mayoría de los coeficientes fueron de  $H=0.60$  y otros pocos de  $H= 0.50$ , lo que se traduce en resultados mixtos es decir, unas series resultaron persistentes otras no, pero al analizar con mayor profundidad obtuvieron la conclusión de que los periodos en que se obtuvieron coeficientes de  $H=0.50$  se debieron al incremento de pequeños inversionistas y el acceso de cuentas on-line, es decir debido a demandas no esperadas de operaciones infrecuentes de pequeños inversionistas y que el incremento en las frecuencias de las operaciones realizadas a través del S&P500 llevaba a que los resultados se acercaran a la HME, es decir al famoso paseo aleatorio. Estos resultados concuerdan con los obtenidos para efectos de esta investigación porque los obtenidos oscilan entre 0.537 y 0.610, no se encontró ninguno menor a 0.50. También Espinosa (2007) menciona a autores como Greene y Fielitz (1977) u otros como Peters (1991) que han obtenido resultados de  $H > 0.50$  en análisis al S&P500, donde han confirmado evidencia de comportamiento persistente, resultado que también concuerda con los resultados de esta investigación.

De acuerdo con Peters (1994 y 1991) cuando hay valores muy grandes en el número de observaciones teóricamente H tendería a ser 0.50 y el efecto de memoria de largo plazo se va desvaneciendo. Para identificar los ciclos, hay que observar en las gráficas hasta dónde se mantiene el comportamiento persistente, observar dónde se rompe, por ejemplo en la gráfica II:

<http://congreso.investiga.fca.unam.mx>

[informacongreso@fca.unam.mx](mailto:informacongreso@fca.unam.mx)

Teléfonos

52 (55) 5622.84.90

52 (55) 5622.84.80

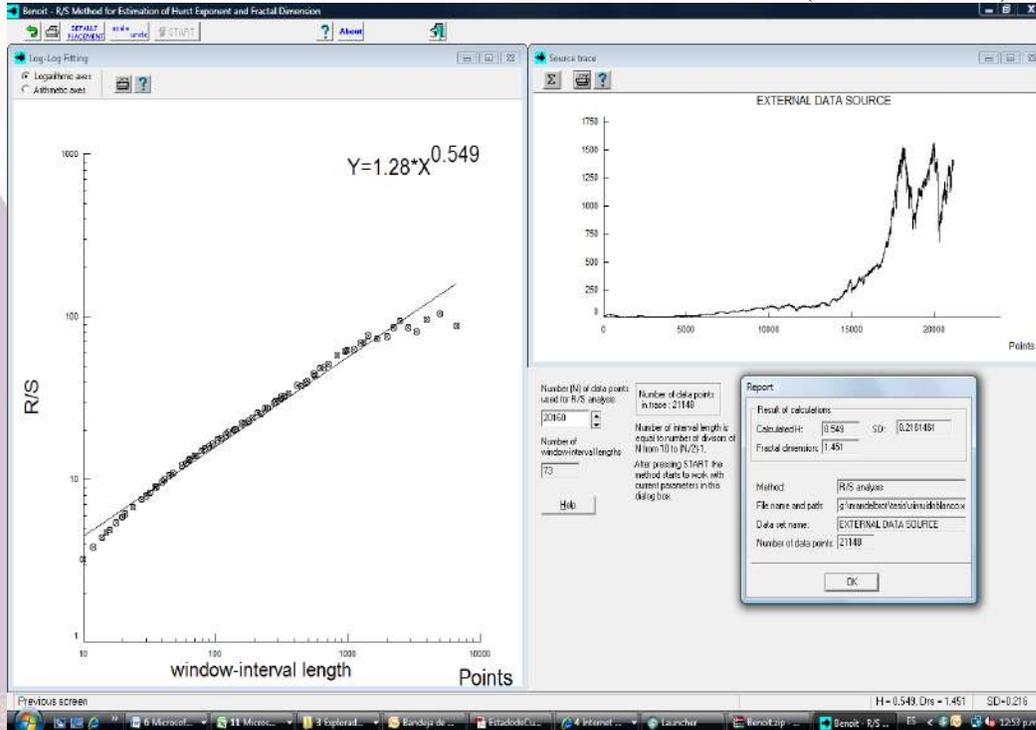
Fax

52 (55) 5616.03.08



División de Investigación, Facultad de Contaduría y Administración, UNAM  
Circuito Exterior s/n, Ciudad Universitaria, México, D.F., C.P. 04510

Gráfica II : ANALISIS R/S S&P 500 filtrado sin ruido blanco (serie de 1928-2012)



Fuente: Elaboración propia

Se observa en la línea de tendencia que  $H$  se mantiene por encima del valor 0.50 aproximadamente hasta  $N = 1200$  o  $1300$ . A partir de esos datos la gráfica anterior comienza a seguir un paseo aleatorio muy alrededor de  $H = 0.50$ ; recordemos que se trata de datos de precios de cierres diarios, en promedio estamos hablando de 2 años. Esto quiere decir que la estructura fractal del ciclo es de aproximadamente 2 años, lo que significa que si se quiere estimar algo utilizando este dato, no debe ser con un horizonte mayor a 2 años ya que entonces el ciclo se rompe. Cabe mencionar que los ciclos no son lineales, es decir no son periódicos. Lo generalmente recomendado al realizar análisis R/S es utilizar unos 10 ciclos para obtener datos fidedignos. Es decir, primero hay que determinar lo que dure un ciclo y multiplicarlo por 10 y así sabremos si hemos considerado el número de datos correcto. En este caso si el ciclo es de unos dos años, debemos tomar alrededor de 20 años de datos (Peters 1994).

De esta serie se eligieron los intervalos de tiempo separados por ciclos largos regulares y ciclos largos irregulares notorios en la gráfica de arriba precisamente para evitar un problema de correlación serial; es decir, no hay que olvidar que la utilidad del análisis depende del horizonte o base temporal que se emplea. En este caso al ser una muestra tan grande, (se incluyeron más de 21,000 datos) nos hallamos frente a una muestra de alta frecuencia y pudiera ser que incurriésemos en distorsiones por correlación serial, es decir, que estemos generando un exceso de confianza en los resultados por tener una muestra tan amplia, y si se consideran datos de cierre con baja frecuencia, podría resultar insuficiente la muestra para garantizar la calidad del resultado, por esta razón se seccionó la serie de tiempo, y así resultó más preciso comparar unas series con otras y apreciar si es que tienen resultados opuestos o similares, y precisamente vemos que hay resultados muy similares,

aun combinando distintos tiempos y número de datos en cada análisis, los coeficientes H no presentan variaciones sustanciales entre el rango menor y el rango mayor encontrado. Otra metodología que sería interesante aplicar a una serie de tiempo de alta frecuencia sería el análisis por medio de wavelets que funciona muy bien con datos de este tipo (Tellez et als.).

Derivado del análisis R/S podemos también determinar la dimensión fractal como  $D= 2-H$ . Sabemos que el movimiento browniano tiene dimensión fractal de 1.5; en nuestros resultados, por ejemplo, la serie de 1928-2012 en donde  $H=0.549$  la dimensión fractal es menor que la browniana, es de 1.451 y a medida que H crezca tenderá a acercarse a una recta. Hay que recordar que un punto para estos efectos tiene dimensión  $D= 0$ , una recta,  $D=1$ , una superficie  $D=2$ . Cuando  $H < 0.50$ , por ejemplo en el periodo de 1928-1952  $H=0.537$  la dimensión fractal se incrementó a 1.463 y se acercaría teóricamente más a una superficie ( $D=2$ ). Concluimos de esto, que cuanto mayor es la dimensión, mayor será la variación, ya que la dimensión está relacionada con las variaciones que se presentan entre puntos próximos.

El valor de  $H > 0.50$  implica que las observaciones no son independientes, sino que cada evento tiene una memoria de largo plazo. El pasado determina el presente; los eventos están interconectados. Esta es una aseveración interesante, se trata de proponer una correlación matemática entre el impacto del presente sobre el futuro. Peters (1991) propone al respecto la correlación siguiente:

$$C = 2^{(2H-1)} - 1 \quad C = \text{medida de correlación} \quad H = \text{Hurst} \quad (3)$$
$$C = 2^{((2*0.549)-1)} - 1 = 0.0702$$

En la serie de tiempo del S&P 500 1928-2012 estudiada se puede apreciar, utilizando la medida de correlación, que la aproximación de recta de regresión es confiable, por lo tanto, el valor del coeficiente Hurst es válido estadísticamente. Si no existiera correlación, la medida de correlación de Peters, sería de  $C=0$ ; sin embargo una correlación de 0.0702 es bastante débil. Si el H obtenido fuera de por ejemplo 0.90, la correlación sería de 0.741, si  $H = 1$ , la correlación habría sido de 1.

Para confirmar la dependencia de la serie de valores, Díaz Mata (2006) cita a Peters (1991) y menciona que él propone que se revuelvan los datos de forma que el orden de los datos quede completamente revuelto, y se recalcule H. Dado que los datos siguen siendo los mismos, la distribución frecuencial no sufriría variaciones y en teoría al revolver los datos se destruiría la estructura del sistema y rompería el efecto de memorias de elefante (memorias de largo plazo) y el nuevo coeficiente estimado de H debería resultar mucho menor que el obtenido con los valores originales. Al realizar esta prueba sobre la serie de 1928-2012 obtuvimos los resultados que se muestran en la gráfica III “Ejercicio de iteración random sin ruido blanco (con filtro) para verificar si se mantiene o destruye la estructura”.



original ( $H$  original: 0.549,  $H$  datos revueltos: 0.026) lo que confirma la validez del análisis R/S. Según Peters (*et al.*) esto prueba que la serie original tiene correlación de largo plazo.

3. Antes de realizar el análisis R/S se filtró el ruido blanco de cada una de las series con la finalidad de obtener una distribución que se ajuste a los supuestos del modelo de valuación financiera R/S, y se calculó  $H$  con el filtro y  $H$  sin el filtro. El resultado fue que ambos cálculos de  $H$  fueron muy semejantes, es decir que la serie de tiempo del S&P 500 no se vio afectada más que de forma débil por el ruido blanco, y fue indistinto retirar el ruido blanco ya que se obtuvo como resultado genérico un comportamiento persistente ( $H > 0.50$ ). En ningún caso (datos filtrados) se obtuvo un coeficiente de  $H$  que no resultara mayor a 0.50. El análisis R/S es un método robusto y nos da una medida confiable de si los datos muestran una caminata aleatoria o es que hay un efecto de memoria de largo plazo.

4. Estas series presentan indicios de comportamiento fractal. La dependencia a largo plazo de los datos crea una tendencia, no hacia un nivel en particular, sino hacia cambios de una magnitud particular, en este trabajo el resultado fue de un cambio persistente. ¿Y para qué sirve conocer  $H$ ? Para gestionar no sólo tendencias, sino riesgo. Ya hay trabajos recientes en donde se ha intentado forjar una medida de riesgo a partir de  $H$  (Mandelbrot y Hudson, 2006), pero es justo aquí el punto de partida para que la investigación y la ingeniería financiera adopte verdaderamente un método científico. Los resultados obtenidos en esta investigación concuerdan con los resultados de otros investigadores: Peters (1991) obtuvo que el índice S&P 500 es persistente, Bayraktar E., Poor H. y Sircar K. (2004) también llegaron al mismo resultado, de igual forma lo hicieron Greene, M.T. y Fielitz B. (1977).

5. La correlación derivada del exponente de Hurst bien puede ser una medida del impacto del sentimiento del mercado (generado por eventos pasados) en cuanto a los retornos futuros de los mercados, en este caso del S&P 500. Este “sentir” del inversionista representa la interpretación de los inversionistas sobre los eventos que influyen los cambios en los mercados. Esta interpretación no se refleja inmediatamente en los mercados (tal y como lo establece la HME), de hecho la manifiesta vía los retornos y comportamientos que perduran por décadas. El reto ahora es desarrollar un modelo de valuación de activos que tome en cuenta un proceso no lineal en su desarrollo.

6. Uno de los objetivos centrales de esta investigación es probar mediante el método R/S la existencia de memoria a largo plazo en el S&P 500, y por tanto que hay indicios de comportamiento caótico y fractal, mismo que se probó determinando su coeficiente de  $H$  (de forma seccionada). Una aplicación de estos resultados sería en el modelo de portafolios y coberturas. Por ejemplo: un portafolio que consista en índices o acciones que comparten un determinado valor de  $H$  y analizar sus retornos. Si un índice en particular muestra que su coeficiente  $H$  disminuye frente a un determinado valor, la posición que se tiene en ese índice o acción debería evaluarse cerrar esa posición.

7. El paso siguiente sería: realizar otros procedimientos alternos que tienen como base el movimiento browniano tales como el variograma, el análisis de *wavelets* (Tellez Gaytán, y López Sarabia 2010), análisis de densidad espectral, o bien, aplicar pruebas que directamente parten de nociones caóticas deterministas y estructura fractal, como la reconstrucción del atractor, estimación de los exponentes de Lyapunov, o dimensión fractal

52 (55) 5622.84.90

52 (55) 5622.84.80

Fax 52 (55) 5616.03.08

(Bahena Villagómez, 2009); no obstante, la aplicación de los mencionados métodos rebasa el alcance de la presente investigación, y serían materia interesante de otra investigación.

Tal como lo menciona Peters (1994) el mayor inhibidor de la hipótesis del mercado fractal, es precisamente la carencia actual de herramientas de análisis y modelado que faciliten las predicciones correctas en mayor o menor grado; sin embargo, hay perspectivas alentadoras en la línea de investigación del ruido fractal, por ejemplo dentro del análisis tipo Box Jenkins dentro la familia de los modelos ARFIMA, que es una variante de los ARIMA. Otra alternativa digna de consideración es la de trabajar con modelos autorregresivos como ARCH o GARCH, por ejemplo. Otra alternativa sería incluir el modelo multifractal (Mandelbrot *et als.*, 2006) propuesto por Mandelbrot para determinar el grado de escala de una serie financiera. Este modelo tiene un conjunto de reglas simples que pueden prever una gran variedad de comportamientos según las circunstancias, se parte de los hechos invariables fundamentales del comportamiento del mercado. Este modelo es reciente y aunque ya se ha probado su funcionamiento en el dólar y el marco alemán (Peters 1991), aún está en proceso de perfeccionamiento, pero es mucho más realista que los demás modelos. Tanto el modelo GARCH como el multifractal incluyen una multitud de parámetros. Un punto favorable de GARCH es que combina conceptos estadísticos ya conocidos, un punto en contra es que niega la dependencia a largo plazo salvo que se añadan ciertos parámetros y se forma un modelo híbrido llamado FIGARCH. El análisis multifractal debe verse como una contrapartida natural de dos herramientas matemáticas clásicas: la función generatriz (secuencia de momentos) y el análisis espectral.

Finalmente, la alternativa de investigación más concordante con la crítica al comportamiento aleatorio de precios y rendimientos, es la de reconocer que la distribución gaussiana debe ser sustituida por alguna de la familia de distribuciones estables de Pareto (las cuales tiempo después fueron estudiadas por Levy); dichas distribuciones indudablemente se identifican mejor con lo observado en la realidad, es decir con distribuciones leptocúrticas y con colas gordas, y es precisamente la naturaleza fractal de las cosas la que obliga a replantear este camino como una alternativa de investigación y a continuar la búsqueda del camino correcto en la experimentación y modelización que verdaderamente se apegue a los hechos reales y no únicamente a las verdades empíricas.

Los modelos tradicionalmente utilizados para el análisis de series de tiempo han pronosticado en forma adecuada, el comportamiento futuro en épocas *tranquilas*, pero en tiempos turbulentos han mostrado no ser operativos, dado que no se tienen en cuenta los eventos poco probables. Así, la teoría fractal y multifractal incorporan los análisis de estos cambios, y por lo tanto se ajusta más a la realidad. (Luengas, *et als.* 2010).

Como señala Peters (1994) un mercado necesita estar lejos del equilibrio para estar vivo. El sistema evoluciona dinámicamente, innova, experimenta, aprende de forma permanente; por lo tanto, siempre habrán procesos de alzas y bajas, y de igual forma, la ciencia, la investigación y el conocimiento deben evolucionar hacia nuevos horizontes, para conservarse vivos y para descubrir nuevos caminos y nuevas alternativas a la investigación.

<http://congreso.investiga.fca.unam.mx>

[informacongreso@fca.unam.mx](mailto:informacongreso@fca.unam.mx)

Teléfonos

52 (55) 5622.84.90

52 (55) 5622.84.80

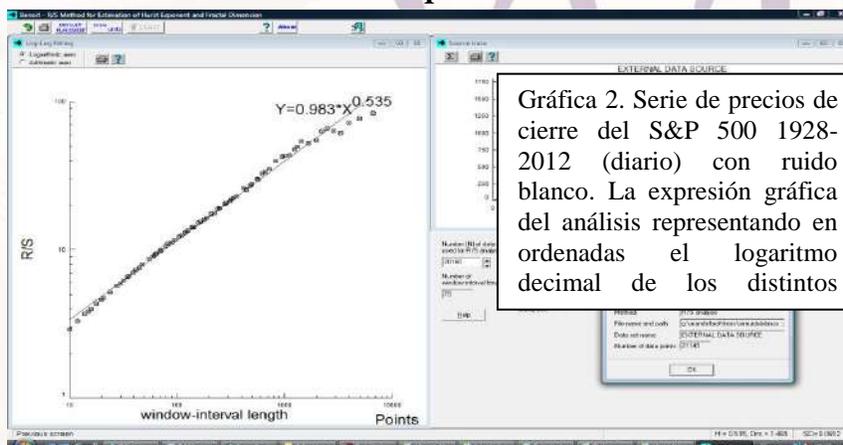
Fax

52 (55) 5616.03.08

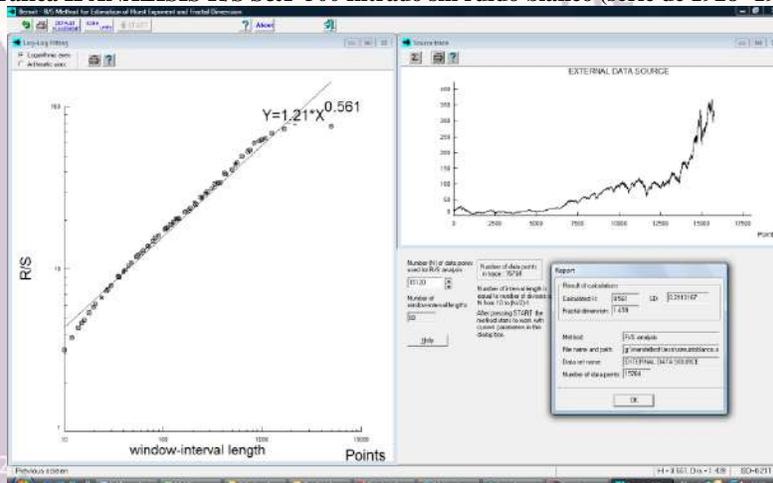


## Sección anexos

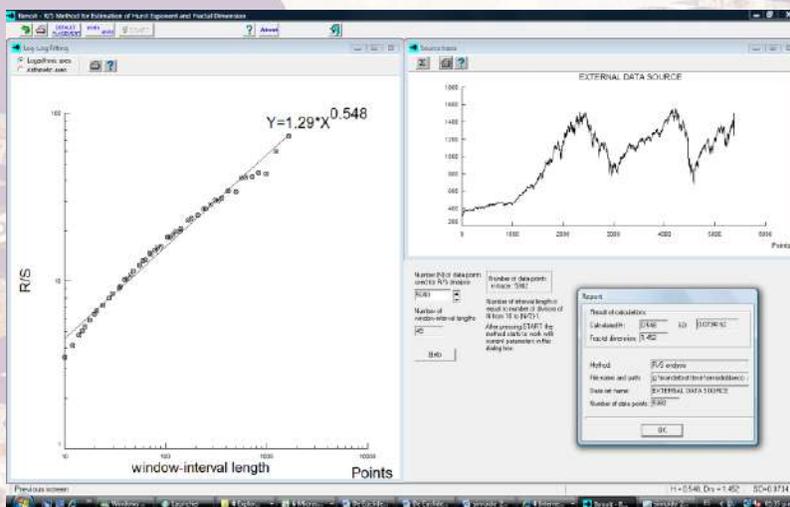
I



Gráfica II ANALISIS R/S S&P 500 filtrado sin ruido blanco (serie de 1928 -1990)



Gráfica III ANALISIS R/S S&P 500 filtrado sin ruido blanco (serie de 1991-2012)



Octubre 3, 4 y 5 de 2012  
Ciudad Universitaria  
México, D.F.

<http://congreso.investiga.fca.unam.mx>

[informacongreso@fca.unam.mx](mailto:informacongreso@fca.unam.mx)

Teléfonos

52 (55) 5622.84.90

52 (55) 5622.84.80

Fax

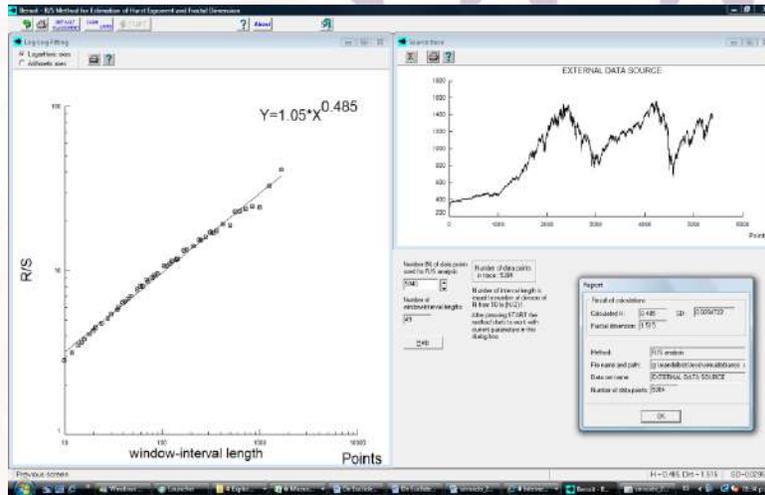
52 (55) 5616.03.08



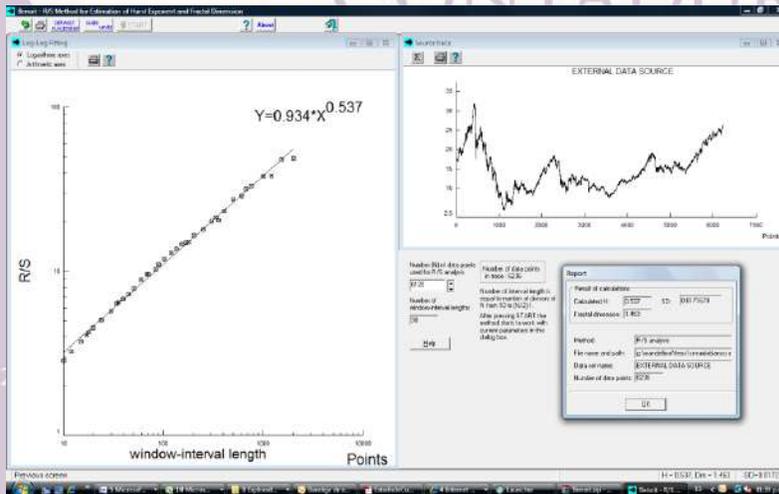
**ANFECA**  
Asociación Nacional de Facultades y  
Escuelas de Contaduría y Administración

División de Investigación. Facultad de Contaduría y Administración, UNAM  
Circuito Exterior s/n, Ciudad Universitaria, México, D.F., C.P. 04510

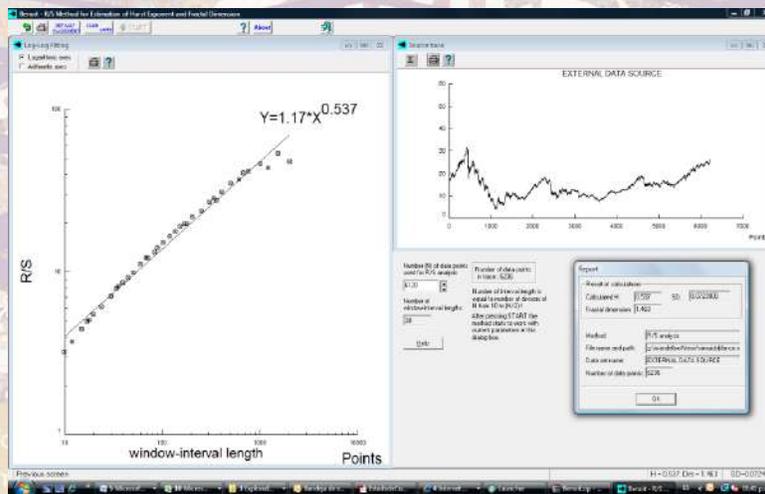
Gráfica IV ANALISIS R/S S&P 500 con ruido blanco (serie de 1991-2012)



Gráfica V ANALISIS R/S S&P 500 con ruido blanco (serie de 1928-1952)



Gráfica VI ANALISIS R/S S&P 500 filtrado sin ruido blanco (serie de 1928-1952)



Octubre 3, 4 y 5 de 2012  
 Ciudad Universitaria  
 México, D.F.

<http://congreso.investigacion.fca.unam.mx>  
[informacongreso@fca.unam.mx](http://informacongreso@fca.unam.mx)

Teléfonos

52 (55) 5622.84.90  
 52 (55) 5622.84.80

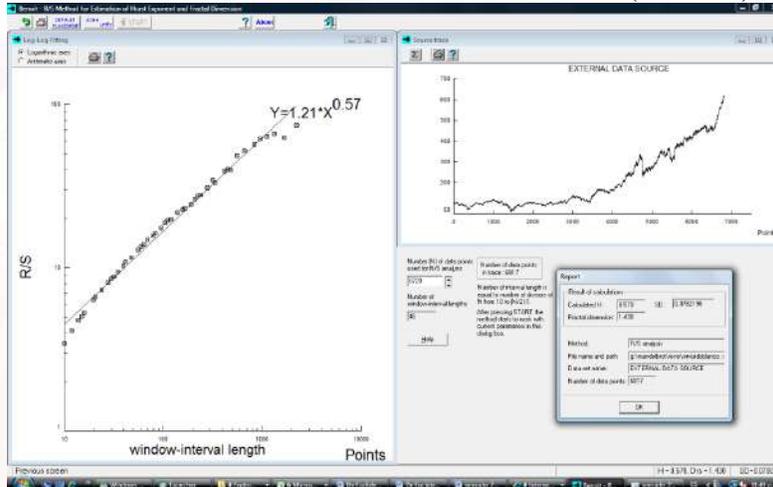
Fax 52 (55) 5616.03.08

ANFECA  
 Asociación Nacional de Facultades y  
 Escuelas de Contaduría y Administración

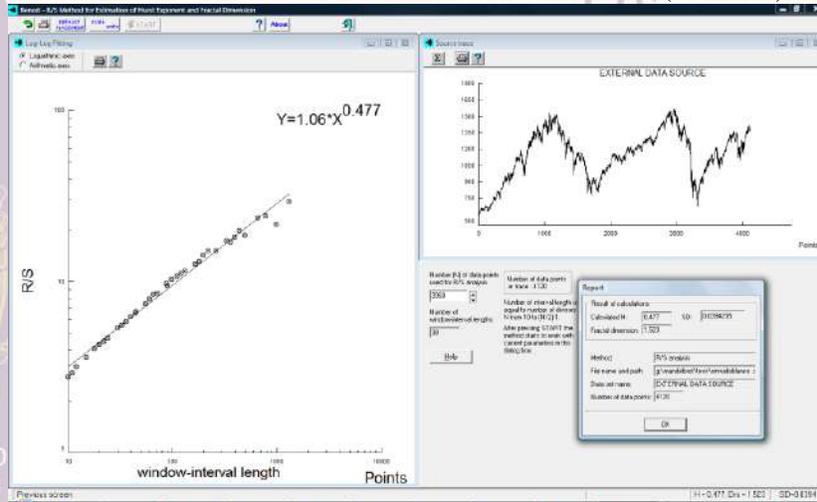
División de Investigación, Facultad de Contaduría y Administración, UNAM  
 Circuito Exterior s/n, Ciudad Universitaria, México, D.F., C.P. 04510



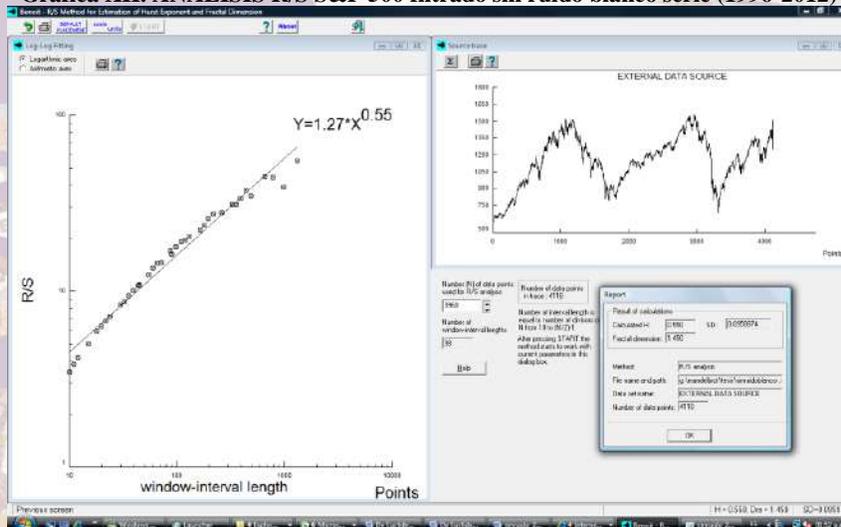
**Gráfica X. ANALISIS R/S S&P 500 sin ruido blanco serie (1969-1995)**



**Gráfica XI. ANALISIS R/S S&P 500 con ruido blanco serie (1996-2012)**



**Gráfica XII. ANALISIS R/S S&P 500 filtrado sin ruido blanco serie (1996-2012)**



Octubre 3, 4 y 5 de 20  
Ciudad Universitaria  
México, D.F.

<http://congreso.investiga.fca.unam.mx>

[informacongreso@fca.unam.mx](mailto:informacongreso@fca.unam.mx)

Teléfonos

52 (55) 5622.84.90

52 (55) 5622.84.80

Fax

52 (55) 5616.03.08



**ANFECA**  
Asociación Nacional de Facultades y  
Escuelas de Contaduría y Administración

División de Investigación. Facultad de Contaduría y Administración, UNAM  
Circuito Exterior s/n, Ciudad Universitaria, México, D.F., C.P. 04510

## Fuentes

Andoyer, H. (1922). *L'œuvre scientifique de Laplace*. Paris. Payot .  
Bahena Villagómez, J.,I. (2009). *Sistemas dinámicos no lineales aplicados al IPC e índices internacionales*. (Tesis magistral), Programa de Posgrado en Ciencias de la Administración, UNAM, México.

Bachelier, L. (1900). *Theory of Speculation thesis*. USA. Princeton.

Bayraktar E., Poor H., Sircar K., (2004). Estimating the fractal dimension of the S&P500 INDEX using wavelet analysis. *International Journal of Theoretical and applied Finance*, Vol. 7, (No. 5) p. 615.

Braun E. (2003). *Caos, fractales y cosas raras*. México. Fondo de Cultura Económica.

Brock, W.A., Dechert, W., & Scheinkman J. (1987). A test for independence based on the correlation dimension. *University of Wisconsin, Madison, University of Houston, University of Chicago*.

Canals, M, R, Olivares, F Labra, L Caputo, A Rivera & F. Novoa. (1998). Caracterización de la geometría fractal del árbol bronquial en mamíferos. *Revista Chilena de Anatomía*. Vol .16 pp. 237-244.

Canals, M., Olivares, R., Labra, F. (2006). Ontogenetic changes in the fractal geometry of the bronchial tree in *Rattus norvegicus*. *Biological Research*. Vol.33, no.1 Recuperado de: [http://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S071697602000000100010&lng=es&nrn=iso](http://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S071697602000000100010&lng=es&nrn=iso).

Cantor, G. (1955). *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*. New York. Dover.

Díaz Mata, F. (2006). Algunas consideraciones sobre el uso de técnicas fractales en el análisis del mercado accionario mexicano. *Contaduría y Administración*. UNAM. enero-abril (N. 224), p.52.

Espinosa, C. (2007). Memoria de largo plazo y efecto reset en retornos accionarios latinoamericanos. *Estudios de administración*. vol. 14, (Nº 1) pp. 47-70.

Fama, E. (1965). Random Walks In Stock Market Prices. *Financial Analysts Journal*. Sep-Oct, Vol. 21 (N. 5): pp. 55-59.

Flasher. Geometría fractal aplicada al mercado de divisas: un estudio empírico del comportamiento autosimilar. (s.f.). (Trabajo de investigación financiera empresarial, inédito para concurso del IMEF). UNAM. México.

<http://ccinformacongreso@fca.unam.mx> Feder, J. (1988). *Fractals*. New York, Plenum Press.

[informacongreso@fca.unam.mx](mailto:informacongreso@fca.unam.mx)

Teléfonos

52 (55) 5622.84.90

52 (55) 5622.84.80

Fax

52 (55) 5616.03.08



Gálvez M. T. (2005). *Análisis Fractal del mercado de valores de México (1978-2004)*. (Tesis de magistral) Disponible en: Instituto Politécnico Nacional. México.

García, M. A. (1998). *Estudio de la variabilidad del ritmo cardíaco mediante técnicas estadísticas, espectrales y no lineales*. (Tesis Doctoral). Disponible en: Universitat Politecnica de Catalunya. Barcelona. España

Gaston J. (1918) . Mémoire sur l'iteration des fonctions rationnelles. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. 8.

Greene, M. T. & Fielitz B. (1977). Long-term dependence in common stock returns. *Journal of Financial Economics*, Vol. 4, (N. 3), 05-77, pp. 339-349.

Hermite, C., (2008). Complete Dictionary of Scientific Biography. Consultado el 28 de mayo de 2012 de Encyclopedia.com: <http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830901963.html>

Hinojosa, M. & Chávez, L. (2001). Autoafinidad de superficies de fractura del vidrio, *Ingenierías*, Vol . 4 (N.13), pp. 50-54.

Hoop, B, Kazemi, H. & Leibovitch, L. (1993). Rescaled range analysis of resting respiration. *Chaos*, Vol. 3 (N.1), pp. 27-29.

Hosking, J.R.M, (1981). Fractional differencing, *Biometrika*, Vol. 68, (N. 1). pp. 165-176.

Hurst, H.E. (1951). Long-term- Storage of Reservoirs, *Transactions of the American Society of Civil Engineers*. p. 116.

Ibarra O. J., (2004). Caos en el mercado cambiario mexicano: Aplicación de la teoría del caos en los tipos de cambio, *Ensayos-* Vol. XXIII, (N. 1). 05-04, pp. 31-60.

Lévy, P, S. J .,Taylor, Bull. (1975). London Math. Soc. 7 (3)(1975), 300-320.

Lo, A.(1991). Long term memory in stock market prices, *Econometrica*. p. 1270-1320.

Luengas, D., Ardila, E. y Moreno, J.F. (2010) Metodología e interpretación del coeficiente de Hurst. Este artículo es parte del trabajo desarrollado por Esperanza Ardila y Diego Luengas para optar por el título de maestría en finanzas en la Universidad Externado de Colombia.

Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices. *The Journal of Business of the University of Chicago*. Vol. 36, 394-419.

<http://ccinforma.fca.unam.mx> Mandelbrot, B. (1970). *La Geometría fractal de la naturaleza*. España. Matem. Tusquets Editores.

Teléfonos

52 (55) 5622.84.90

52 (55) 5622.84.80

Fax

52 (55) 5616.03.08

Mandelbrot, B. y Hudson, R. (2006). *Fractales y finanzas: una aproximación matemática a los mercados: arriesgar, perder y ganar*. Barcelona, Tusquets Editores.

Mantenga, R. N., Palágyi, Z. & Peters, H. E. (1999). Applications of statistical mechanics to Finance. *Physica A*. Vol. 274. pp. 216-221.

Mansilla, R. (2003). *Introducción a la econofísica*. Madrid. Equipo Sirius.

Mas, F., Mach, J., Trigueros, P. P., Claret, J. & Sagués, F. (1996). *Creixement fractal: als límits de la modelització*. En E. Casassas & M. Esteban (Eds.). *Modelització macroscòpica en Ciències Experimentals*. (Tesis doctoral) Disponible en : Institut d'Estudis Catalans, Barcelona. España.

Masters, B. R. (2004). Fractal analysis of the vascular tree in the human retina. *Annual Review of Biomedical Engineering*. Vol. 6 (N. 1), 427-452.

Ortiz R., A. (2008). *Construcción y programación de un algoritmo paralelo para determinar el exponente de Hurst*, (Tesis de maestría) Disponible en: Instituto Politécnico Nacional, Centro de Innovación y desarrollo tecnológico de computación, Distrito Federal, México.

Peano (1889). *The principles of arithmetic, presented by a new method in Jean van Heijenoort*. USA. Harvard Univ. Press.

Peters, E.E. (1991). *Chaos, order in the capital markets*. New York. John Wiley & Sons, Inc.

Peters, E.E. (1994). *Fractal Market Analysis*, New York. John Wiley & Sons, Inc.

Poincaré, H. (1902-1908), *The Foundations of Science*, New York: *Science Press*, recuperado de: <http://www.archive.org/details/foundationsscie01poingoo>.

Rodriguez, L., K.J, (2011). Validez del supuesto de neutralidad del horizonte de tiempo en el CAPM y la metodología del Rango escalado: Aplicación a Colombia. *Borradores de Economía*, N. 672.

Sierra, G. (2007). Procesos Hurst y movimiento browniano fraccional en mercados fractales: valuación y aplicaciones a los derivados y finanzas. (Trabajo de investigación Primer lugar premio nacional de derivados) Obtenido de: <https://www.mexder.com.mx>

Sierpiński, W. (1964). Elementary theory of numbers. *Monografie Matematyczne*. Vol 42. Recuperado de: <http://matwbn.icm.edu.pl/kstresc.php?tom=42&wyd=10>.

<http://congreso.investigacion.fca.unam.mx>

información Tellez G., J.C., y López S., P. (2010). Comovimiento entre mercados accionarios de América Latina y Estados Unidos: Un enfoque de wavelets. *Revista ECONOMÍA: TEORÍA*

Teléfono 52 (55) 5622.84.90

52 (55) 5622.84.80

Fax 52 (55) 5616.03.08

y *PRÁCTICA*, Universidad Autónoma Nuevo León, México. Num. 32. Nueva Época, 01-10.

Wiener N., 1958, *Nonlinear Problems in Random Theory*. USA, MIT Press & Wiley.

# XVIII CONGRESO INTERNACIONAL DE CONTADURÍA ADMINISTRACIÓN E INFORMÁTICA



Octubre 3, 4 y 5 de 2012  
Ciudad Universitaria  
México, D.F.

Diseno: FEA, Maritza Alvarez Pineda / Montajes: Fotografías: Raulo Lopez Chavez

<http://congreso.investiga.fca.unam.mx>  
[informacongreso@fca.unam.mx](mailto:informacongreso@fca.unam.mx)

Teléfonos

52 (55) 5622.84.90  
52 (55) 5622.84.80

Fax 52 (55) 5616.03.08



División de Investigación, Facultad de Contaduría y Administración, UNAM  
Circuito Exterior s/n, Ciudad Universitaria, México, D.F., C.P. 04510